Operative Ansätze zu einer inhaltlichen Logik im Mathematikunterricht

Dissertation

zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der Erziehungswissenschaften
an der
Pädagogischen Hochschule Ruhr
in
Dortmund

vorgelegt von

Gerd Walther, Amberg

(Februar 1974)

Operative Ansätze zu einer inhaltlichen Logik im Mathematikunterricht

Dissertation

zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der Erziehungswissenschaften
an der
Pädagogischen Hochschule Ruhr
in
Dortmund

vorgelegt von

Gerd Walther, Amberg

(Februar 1974)

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent Prof.Dr. Erich Wittmann
Korreferent: Prof.Dr. Heinrich Winter

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Februar 1974

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung

1. Kapitel

Hintergrund

1. Skizze der didaktischen Diskussion zum Thema "Logik im Unterricht" Seite 1

2. Die mengentheoretisch-logizistische Auffassung von Logik. Anhang 9

3. Die inhaltlich-instrumentale Auffassung von Logik 16

4. Beziehungen zwischen J. Piagets genetischer Erkenntnistheorie der Logik und P. Lorenzens operativer Begründung von Logik und Mathematik 23

2. Kapitel

Der syntaktische Folgerungsbegriff und seine Präfiguration

Einleitung und Übersicht 35

1. Die Rolle von Beweisen im Algebraunterricht 39

a) Traditionelle Mathematik

b) Neue Mathematik

2. Grundbegriffe der syntaktischen Folgerung 44

3. Didaktische Aspekte der syntaktischen Folgerung 5o

a) Die syntaktische Folgerung im Mathematikunterricht

b) Der psychogenetische Hintergrund syntaktischer Operationen 52

α) Gruppierungsstruktur und operatives Lernen

β) Didaktisch relevante Modelle von Fastgruppierungen

4. Grundbegriffe der syntaktischen Folgerung und deren Präfiguration 69

a) Vorbemerkungen

b) Kalkülspiele mit linearer Figurenkonfiguration 72

α) Propädeutik

β) Protologische Spiele

γ) Das Kalkülspiel Seitenwechsel

c) Kalkülspiele am Minicomputer mit ebener Figurenkonstellation 95

d) Kalkülspiele mit semantischem Hintergrund 99

3. Kapitel

Die instrumentale Funktion logischer Konnektoren

1. Einleitung und Übersicht 1o4

2. Problemstellung anhand der Analyse einer Aufgabe 1o9

3. a) Der instrumentale Aspekt der Logikkalküle von E. Beth, G. Gentzen, N. Kolmogorov 112

b) Didaktische Analyse der Systeme von E. Beth, G. Gentzen, N. Kolmogorov 126

4. Die pragmatische Funktion logischer Konnektoren 131

a) Grundbegriffe der Semiotik

b) Semiotik und Lernprozeß 132

5. Interpretation logischer Konnektoren durch dialogische Handlungsschemata 138

6. Vorschläge zur Einübung und Anwendung logischer Handlungsschemata 146

a) Identifikation von Merkmalen

b) Einübung und Anwendung logischer Handlungsschemata bei komplexen arithmetischen Aussagen. Präfiguration des Begriffs Beweisstrategie 152

c) Beweis komplexer Aussagen auf symbolischer Stufe 163

α) Der dialogische Beweis

β) Der konventionelle Beweis

d) Ansätze zur formalen Logik 174

Einleitung

Die im Rahmen des gegenwärtigen Mathematikunterrichts überhaupt betriebene logische Schulung steht fast ausschließlich unter mengentheoretisch-logizistischen Gesichtspunkten [1]. Diese an der formalen Logik orientierte Konzeption thematisiert einseitig gewisse logische Systeme (z.B. Aussagelogik, Boolesche Algebra), sowie einige logische Techniken, die hauptsächlich unter formalen Gesichtspunkten bei speziellen mathematischen Themen (z.B. Gleichungslehre) angewendet werden. Die in der Verwendung und Anwendbarkeit der Logik bei der mathematischen Arbeit liegende nützliche Funktion rückt dadurch in den Hintergrund.

In der vorliegenden Arbeit sollen demgegenüber Ansätze für eine inhaltlich orientierte, d.h. unmittelbar mit mathematischen oder anderen Aktivitäten verbundene und auf Erkenntnisgewinn gerichtete Logik entwickelt werden [2], die freilich - soweit wünschenswert - auf verschiedenen Wegen zu dem Gebiet der theoretischen Logik fortgesetzt werden können.

Im Mittelpunkt der im folgenden dargelegten didaktischen Konzeption stehen der m.E. für den Mathematikunterricht fundamentale Begriff der syntaktischen Folgerung und eine operationale Einführung der logischen Konnektoren [3].

Der syntaktische Folgerungsbegriff spielt überall dort in der Mathematik eine Rolle, wo es um die nach syntaktischen Regeln durchzuführende schematische (regelhafte) Umformung von Zeichenreihen geht. So ordnen sich z.B. algebraische Term- und Gleichungsumformungen dem syntaktischen Folgerungsbegriff unter, so daß diese Aktivitäten im Algebraunterricht unter dem Aspekt des syntaktischen Beweises behandelt werden können.

Die Abhängigkeit der Lösungshandlungen bei logisch zusammengesetzten Aufgaben von deren logischer Struktur legt es nahe, logische Konnektoren auf dynamische Weise durch Handlungsschemata einzuführen. Hierbei wird darauf hingearbeitet, daß der Schüler die logischen

---

1 In den neuen Unterrichtsempfehlungen zur Sekundarstufe 1/2 des Landes NRW ist diese Auffassung sogar festgeschrieben worden.

2 Vgl. die Untersuchung von Th. Neumann, M. Otte (1971)

3 Konnektor fungiert als Oberbegriff zu Junktor und Quantor.

Partikel in ihrer pragmatischen Funktion erkennt und dementsprechend zu bestimmten Handlungen stimuliert wird. Auch in anderen Fächern können die mit den logischen Konnektoren verbundenen Handlungsschemata in Verbindung mit inhaltlichen Problemen eingeübt und angewendet werden, womit sich Gelegenheit für eine fächerübergreifende logische Schulung bietet. Die derzeit übliche statische Methode der Einführung logischer Junktoren durch Wahrheitstafeln mag nützlich sein für die Behandlung theoretischer Probleme der Logik (Entscheidungs - Modellbegriff), zur Lösung inhaltlicher Probleme trägt sie dagegen wenig bei. Besonders deutlich zum Ausdruck kommt die Kluft zwischen jener an der Fachstruktur der theoretischen Logik orientierten Methode und den in der aktiven Mathematik benötigten logischen Kenntnissen bei der Semantik des Allquantors. Aus der prädikatenlogischen bzw. metasprachlichen Umschreibung seiner Bedeutung kann kaum unmittelbar Nutzen für seine Verwendung bei der mathematischen Arbeit gezogen werden.

Die hier unter didaktischen Gesichtspunkten dargestellten operativen Ansätze beruhen ganz wesentlich auf zwei bekannten operativen Theorien, einmal der operativen Begründung von Logik und Mathematik durch P. Lorenzen, zum anderen auf der genetischen Erkenntnistheorie von J. Piaget.

Der Gedanke, die Bedeutung logischer Zeichen in eine enge Verbindung zu mathematischen Aktivitäten zu bringen, wurde bereits in mehreren Systemen der theoretischen Logik thematisiert (z.B. Bethsche Tableaux, Kalkül des natürlichen Schließens von Gentzen, Kolmogorovs Aufgabenlogik). Eine didaktische Analyse jener Systeme zeigt, daß dem intendierten Aufforderungscharakter logischer Konnektoren am besten durch ihre dialogische Interpretation (P. Lorenzen und dessen Schüler K. Lorenz) Ausdruck verliehen werden kann. Da die Bedeutung - der operative Sinn - logischer Partikel durch die Zuordnung: logisches Zeichen ⟶ Handlungsschema festgelegt wird, spielen in die didaktischen Überlegungen auch semiotische Aspekte hinein.

Die dialogische Deutung logischer Konnektoren liefert einen natürlichen Ansatzpunkt für dialogische Beweisverfahren[1], die jedoch in der hier vertretenen Auffassung im Hinblick auf den konventionellen Beweis nur eine vorbereitende Funktion erfüllen. Wesentlicher scheint

---

1 Vgl. die Arbeiten von H. Vollrath

es, auf eine Verinnerlichung der dialogischen Situation jener Beweisverfahren hinzuarbeiten und sie damit für den konventionellen Beweis nutzbar zu machen. Der in diesem Zusammenhang wichtige Begriff der dialogischen Gewinnstrategie kann m.E. schon sehr früh in Verbindung mit einfachen arithmetischen Aussagen vorbereitet werden. Die dialogische Methode kann in einer mehr formale und theoretische Gesichtspunkte betonenden Richtung ausgebaut und zur Begründung logischer Schlußschemata verwendet werden, wodurch der Weg zur formalen Logik eröffnet ist. Eine andere Möglichkeit der Fortsetzung unter mehr informellen Aspekten besteht darin, das Dialogisieren in den allgemeineren Zusammenhang auch außermathematischer Argumentationen zu stellen.

Einer der zentralen Aspekte der Erkenntnistheorie J. Piagets ist die auf den Prozessen der Koordination und Organisation effektiver Handlungen beruhende Genese mentaler Operationen. In ihrer lernpsychologischen Deutung gab die Piagetsche Theorie Anlaß zur Formulierung einer Reihe wichtiger didaktischer Prinzipien: operatives Prinzip, Präfigurationsprinzip, Integrationsprinzip. Sie bilden den psychogenetischen Hintergrund für die Vorbereitung des syntaktischen Folgerungsbegriffes auf der Grundlage von P. Lorenzens Protologik.

Wie im 1. Kapitel gezeigt wird, gibt es neben dieser für die Didaktik fruchtbar zu machenden Verbindung zwischen den operativen Theorien P. Lorenzens und J. Piagets erkenntnistheoretische Berührungspunkte, die sich auf das Begründungsproblem der Logik beziehen.

Die vorliegende Arbeit versteht sich in erster Linie als eine didaktische Analyse des im Thema angesprochenen Bereiches. Nachdruck wurde u.a. darauf gelegt, nicht im Theoretischen und dem Verweis auf die Möglichkeiten schulpraktischer Verwirklichung stehen zu bleiben, sondern Ansätze für die Behandlung der erörterten Themen im Unterricht aufzuweisen[1]. Über die Entwicklung breiter angelegter systematischer Kurse zu den im 2. und 3. Kapitel erörterten Gebieten sowie über unterrichtspraktische Erfahrungen wird an anderer Stelle zu berichten sein.

---

1 Zu einer "stichprobenartigen" Erprobung der Praktikabilität gewisser Teile des 2. und 3. Kapitels hatte ich in einer 8. (12.) Klasse eines altsprachlichen Gymnasiums Gelegenheit.

1. Kapitel

Hintergrund

In dem nun folgenden Kapitel wollen wir uns mit dem Hintergrund für die im 2. und 3. Kapitel entwickelten didaktischen Vorschläge zu einer inhaltlichen Logik auf operativer Grundlage befassen. Die beiden ersten Abschnitte sollen einen skizzenhaften Eindruck der Situation von "Logik im Unterricht" seit dem Aufstieg der Neuen Mathematik vermitteln. Der 2. Abschnitt bringt insbesondere eine Auseinandersetzung mit der im Unterricht derzeit vertretenen mengentheoretisch-logizistischen Auffassung von Logik. Von dieser Auffassung wird im 3. Abschnitt der den weiteren Ausführungen zugrunde liegende inhaltlich-instrumentale Standpunkt in der Logik abgehoben, wobei bereits verschiedentlich implizit operative Ansätze für die didaktische Realisation erkennbar sind. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels nehmen wir explizit die Diskussion des Operativen auf und stellen Beziehungen her zwischen den aus völlig verschiedenen wissenschaftlichen Richtungen entwickelten, sich jedoch in der fundamentalen Idee des Operativen treffenden, genetischen Erkenntnistheorie J. Piagets und der operativen Begründung von Logik und Mathematik durch P. Lorenzen. Das 2. Kapitel wird diese Zusammenhänge unter didaktischen Aspekten weiter vertiefen.

1. Skizze der didaktischen Diskussion zum Thema "Logik im Unterricht"

Der vorliegende Abschnitt bringt den in seiner wissenschaftlichen Entwicklung diffusen Komplex der theoretischen Logik zu der sich ebenso heterogen darstellenden Situation von "Logik im Unterricht" in Beziehung. Es zeigt sich, daß die als Transferbehauptungen einzustufenden Ansprüche mancher Unterrichtsfächer, einen Beitrag zur logischen Denkerziehung zu leisten, sowie die innermathematischen Probleme über Art und Umfang der logischen Durchdringung des Unterrichtsstoffes traditionell bedingt sind.

Seit dem Beginn der Reformbestrebungen des Mathematikunterrichts und dem Aufstieg der Neuen Mathematik ist in der Didaktik ein ständig wachsendes Interesse an dem zur Zeit noch sehr unscharf erscheinenden Problemkomplex Logik festzustellen: "L'introduction

propédeutique de quelques éléments de logique mathématique à l'école primaire et secondaire est un postulat de la didactique mathématique moderne, postulat très important, étant donné le but que l'on assigne à l'enseignement de la mathématique. Pourtant la didactique de cette partie n'est pas encore suffisamment développée." [1]

Zu einer ähnlichen Situationsanalyse gelangte der 23. Internationale Kongreß der CIEAEM in Krakau, auf dem durch Vergleich der didaktischen Bemühungen um die mathematische Logik mit dem Geometrieunterricht zusätzlich ein historischer Aspekt in die pädagogische Diskussion eingebracht wurde. "Comme l'enseignement de la géometrie, l'enseignement de la logique dans le cadre des mathématiques élémentaires pose des problèmes pédagogiques et évoque des positions contradictoires, quoique les raisons de ces difficultés et de ces oppositions soient différentes dans les deux cas. La géometrie ... a une grande tradition pédagogique et un des problèmes - clés de l'enseignement moderne, c'est de savoir se libérer de cette tradition, tout en transmettant toutes les valeurs scientifiques et pédagogique de la géometrie classique sous des formes nouvelles. La logique mathématique au contraire n'a pas de grande tradition dans l'enseignement et sa pédagogie se trouve au début de la recherche." [2]

Der in diesen Ausführungen gezogene Vergleich zwischen Geometrie- und Logikunterricht kann aber noch in anderer Richtung fortgesetzt werden. Ebenso wie die Geometrie besitzt die Logik eine Jahrtausende alte Tradition, wenngleich die historische Entwicklung dieser beiden wissenschaftlichen Disziplinen in der Zeit nach Aristoteles in völlig verschiedener Weise verlief. Die Geometrie war von alters her Teilgebiet der Mathematik und blieb es auch nach ihrer Algebraisierung[3]. Die Entwicklung der Logik wurde zunächst innerhalb der Philosophie vorangebracht; nach der verhältnismäßig spät (im 18./19. Jahrhundert) einsetzenden Formalisierung der Logik entwickelte sie

---

1 H. Siwek (1973) S. 23

2 23. Rencontre internationale de la CIEAEM. In: Educ.Studies in Mathématics, Vol. 4 N° 4 (1972)

3 Vgl. jedoch den grundlagentheoretischen Standpunkt P. Lorenzens in W. Kamlah, P. Lorenzen (1967) S. 225 ff.

sich rasch zu einer selbständigen, von der Mathematik unabhängigen Disziplin.
Gegenwärtig scheint wieder manches auf eine stärkere Wechselwirkung zwischen mathematischer Logik (Logistik) und philosophischer Logik hinzudeuten[1].
Historisch wichtig ist ein weiterer Punkt. Seit den Anfängen der Logik wurde das "richtige" Denken zu ihr in Beziehung gesetzt, was von je her einen psychologischen Akzent in ihre Entwicklung hereinbrachte - wie umgekehrt auch die Entwicklung der Denk-Psychologie von logischen Momenten bestimmt wurde; die beiden Richtungen der gegenseitigen Einflußnahme zwischen Logik und Psychologie artikulierten sich in Psychologismus und Logizismus. Im pädagogischen Bereich hat sich dieser psychologische Aspekt der Logik in Formulierungen erhalten wie: "Erziehung zum logischen Denken", "Förderung des Logisch-denken-könnens" etc., mit denen die Vertreter einiger Fachdidaktiken in unverbindlichen Präambeln zu Lehrplänen allgemeinen Erziehungszielen Ausdruck verliehen. Wenn von den philologischen Fächern der Anspruch zur logischen Denkerziehung mit der gleichen (von manchen "Humanisten" sogar mit stärkerer) Vehemenz vertreten wurde (und wird) wie vom Fach Mathematik, so muß gefragt werden, was denn eigentlich diese logische Denkerziehung ausmache (inhaltliche Probleme).
Es darf nicht verwundern, daß sich dieser schon in seiner wissenschaftlichen Entwicklung diffuse Problemkomplex Logik in seiner didaktischen Dimension ebenso heterogen präsentiert. "C'est pourquoi, malgré que l'enseignement de la logique soit mis en seuvre dans l'enseignement secondaire dans certains pays, les méthodes, les programmes concernant cet enseignement, ne sont pas encore précisés les discussions sur ces problèmes deviennent souvent vagues, mais justement au cours de ces discussions s'esquissent certains problèmes qu'on doit envisager avant tout dans la recherche pédagogique." [2]
Zu den pädagogischen und didaktischen Problemen von "Logik im Unterricht" gesellen sich, wie oben angedeutet, inhaltliche Probleme: welche fachspezifischen Inhalte sind am besten geeignet, das

---

1 Vgl. N. Rescher, Topics in Philosopical Logic Amsterdam (1968)

2 Vgl. CIEAEM - Report

Ziel der logischen Denkerziehung zu erreichen. Die Erziehung zum Logisch-Denken-Können ist ein äußerst allgemeines und komplexes Lernziel, das die Entwicklung kognitiver Strukturen ebenso beinhalten kann, wie gewisse formallogische Fertigkeiten und Techniken. Eine umfassende und befriedigende Aufschlüsselung und Untergliederung in Lernziele mittlerer Hierarchie bzw. in Feinlernziele liegt meines Wissens bisher nicht vor, so daß über die Methode der Lernzielanalyse derzeit kaum allgemein verbindliche Hinweise auf die Inhalte einer logischen Schulung zu erwarten sind. Die gegenwärtigen Ansätze zur logischen Schulung orientieren sich an punktuellen, jedoch tiefgehenden stoffdidaktischen Analysen unter logischen Aspekten z.B. der Gleichungslehre, oder an der wissenschaftlichen Logik selbst, von der ein winziger Abschnitt, die Aussagelogik, mit Hilfe der Mengenlehre in den Unterricht heruntertransformiert wird. Ergebnis dieser Transformation der im System der formalen Logik verankerten Fachstruktur in eine Lernstruktur ist der statische Logikkalkül, weit entfernt von einer "logic in action" (W. Servais) der, für sich alleine genommen, kaum einen Beitrag zu den o.g. Zielen zu leisten vermag.

Der Anspruch mehrerer Fächer, einen Beitrag zur logischen Denkerziehung leisten zu können, kann auch unter dem Gesichtspunkt einer Transferbehauptung verstanden werden. Wir beschränken uns im folgenden auf das Fach Mathematik, für das einige wenige Transferuntersuchungen dieser Art vorliegen [1].

Die traditionelle Mathematik begnügte sich bei der Verwirklichung des Zieles der logischen Denkerziehung mit der Didaktik von Beweisverfahren, so daß die traditionelle Union von Beweis und Geometrie die Union von Logik und Geometrie nach sich zog [2]. Die Transferuntersuchungen über die Wahrscheinlichkeit eines Transfers von Mathematikunterricht im allgemeinen auf Logisch-Denken-Können deuten nach Lenné daraufhin, daß mathematische Fähigkeiten und Logisch-Denken-Können nur bedingt gleiche Faktoren mit hohen Ladungen besitzen. "Ein Transfer von mathematischem Unterricht auf "Logisch-Denken-Können" erscheint insoweit auch inhaltlich von den faktorenanalytischen Arbeiten her zumindest als ungesichert." [3] Bei der

---

1 Vgl. H. Lenné (1969) S. 121 ff

2 Vgl. H. Freudenthal (1967) S. 9 und H. Lenné (1969) S. 23o

3 H. Lenné (1969) S. 126

Beurteilung der allgemeinen Transferbedingungen kommt Lenné zu folgendem interessanten Ergebnis: "Bezüglich der Elemente überdecken sich Mathematik und normalsprachliches logisches Denken nur in einem kleinen Bereich syntaktisch einfacher, stereotyper Wendungen, sofern nicht überhaupt ein logischer Code verwendet wird. Ein Transfer über Identität der Elemente ist daher nicht sehr wahrscheinlich." [1] Auch dem Transfer über Strukturen stehen Schwierigkeiten entgegen, obwohl die logischen Strukturen innerhalb der Mathematik und im normalsprachlichen logischen Denken gleich sind. "Die relative Häufigkeit der tatsächlich auftretenden Substrukturen ist jedoch möglicherweise sehr verschieden. So sind die häufigsten Beweisformen in der Mathematik ... praktisch nur in einem Formelapparat handhabbar und daher für logisches Denken in Normalsprache unwichtig." [2] Um dennoch die Möglichkeit von Transfer von mathematische auf normalsprachliche Elemente und Strukturen zu eröffnen, bedarf es eines vermittelnden Systems, das Lenné in Form der Verbalisierung mathematischer Vorgänge bzw. der Mathematisierung verbaler Vorgänge sieht.[3] Weiter unten wird sich zeigen, daß diesem Übersetzungssystem auch bei der formallogischen Schulung und der Anwendung formallogischer Methoden auf normalsprachliche Situationen Bedeutung zukommt.

Insgesamt vertritt Lenné bei der Beurteilung des Transfers vom Mathematikunterricht auf "Logisch-Denken-Können" einen pessimistischen Standpunkt, der sich auch in seinem Vorschlag äußert "... logisches Denken ausschließlich innerhalb jedes Bereichs zu üben und jedenfalls nicht mit Transfer zu rechnen" weil dies "rationeller und kräftesparender sei" [4]. Umgekehrt wäre natürlich zu fragen, ob nicht gerade dadurch, daß jeder Bereich in Verbindung mit seinen spezifischen Inhalten logische Strukturen entwickelt, erst die für eine Übertragung notwendig breite Ausgangsbasis hergestellt wird, und die auf ein Fach (Mathematik) beschränkte logische Schulung nicht von Anfang an als etwas Singuläres empfunden wird, des-

---

1 H. Lenné (1969) S. 126

2 a.a.O. S. 127. An dieser Stelle muß Lenné freilich korrigiert werden; der indirekte Beweis etwa ist sowohl formal als auch umgangssprachlich durchführbar und wird bekanntlich häufig in normalsprachlichen Situationen verwendet.

3 a.a.O. S. 128

4 ebd.

sen Anwendbarkeit auf außermathematische Bereiche sich dem Schüler erst gar nicht stellt.

Ein weiterer Gedanke Lennés, den er im Zusammenhang mit den skizzierten Problemen des Transfers formuliert, soll hier wiedergegeben werden, weil er m.E. einen Schlüssel zur Eröffnung neuer Ansätze in der didaktischen Forschung zur Logik beinhaltet. "Selbst dort, wo mathematische Strukturen oder "basic concepts" sehr wohl einer Generalisierung auf normalsprachliche Denkweisen fähig erscheinen - vollends, da sie ursprünglich oft erst in umgekehrter Richtung aus diesen entwickelt wurden -, sind in der Mathematikdidaktik solche Verallgemeinerungen weitgehend unausgeformt geblieben. Unter diesen Umständen ist es möglich, daß auch der Transfer vom Mathematikunterricht auf logisches Denken durch einseitige didaktische Konzeptionen gehemmt wird." [1]

Neben dem kognitiven Aspekt des Transfers logischer Fähigkeiten, die im Mathematikunterricht entwickelt werden, auf außermathematische Situationen - man würde dieses Vermögen den kognitiven Strukturen zurechnen - muß auch dem Aspekt der innermathematischen, allgemeiner der fachspezifischen Anwendbarkeit logischer Fähigkeiten und Kenntnisse Rechnung getragen werden. Dieser instrumentale Aspekt der Logik wird häufig mit der Forderung nach "Logischer Durchdringung" des Unterrichts gemeint; sie wird an Einzelthemen wie der Gleichungslehre oder durch die Verwendung logistischer Formalismen, die eine sprachreinigende Funktion gegenüber den "Unsauberkeiten" der traditionellen Mathematik erfüllen sollen, konkretisiert.[2]

Das Verständnis von Logik als einem für die Mathematik nützlichem Werkzeug kommt deutlich in den folgenden Worten zum Ausdruck: "Traditional instruction has always pretended to assure the logical development of mind. In fact, logical ideas remained sufficiently rudimentary and tangled, in a confused fashion, with the subject matter itself and reasoning and definitions. A better mathematical presentation entails the clearest logical demands. In order to unterstand forms of statements and methods of proof, it is indispensable that the student be familiar with the logical ideas of implication and equivalence, of conjunction and of disjunction. It is also desirable to have universal quantifiers, existence ... This

---

1 a.a.O. S. 127 (Hervorhebungen vom Verfasser)

2 Vgl. H. Lenné S. 23o und die Anmerkungen 73, 74 auf S. 396

permits a better grasp of the meanings of definitions or of complex propositions and the easy construction of the negation of such propositions." [1]

Daß die im Mathematikunterricht entwickelten logischen Elemente auch im außermathematischen Bereich eine instrumentale Funktion erfüllen sollten, wurde oben bereits erörtert. Auch die CIEAEM Konferenz hat diesen Punkt erneut diskutiert. "On a souligné le rôle de l'enseignement de la logique dans la formation personelle .... L'apprentissage de la logique est dans un certain sens, l'apprentissage d'une libération personelle. L'enseigenment de la logique facilite aussi l'enseignement des autres sujets et en particulier l'enseignement de la langue maternelle." [2] Angesichts der für 15-jährige Schüler genannten Inhalte über die auf der Konferenz weitgehende Übereinstimmung erzielt wurde[3], sind die obigen Ausführungen sehr kritisch aufzunehmen.

In dem Bericht über die CIEAEM-Konferenz heißt es weiter: "Dans l'enseignement secondaire la logique peut être traiteé en tant qu'outil de même qu'en tant que théorie mathématique". Neben den instrumentalen Aspekt von Logik wird hier ihr mathematisch-theoretischer Aspekt gestellt. Logikkalküle können als mathematische Theorien aufgefaßt werden. Dementsprechend kann die Untersuchung von Logikkalkülen und anderen Gegenständen der Logik selbst als mathematische Aktivität gedeutet werden. Kennzeichnend für den theoretischen Aspekt von Logik ist somit die Tatsache, daß Teilbereiche der Logik im Unterricht selbst Untersuchungsobjekt werden. Beispiel aus neueren Lehrplänen: Boolesche Algebra und Schaltalgebra.

Die bisherigen Überlegungen haben ergeben, daß manche Probleme und Schwierigkeiten in der didaktischen Diskussion über Logik u.a. davon herrühren, daß gewisse Interessengruppen, die den einen oder anderen der genannten Aspekte stark akzentuieren, den Anspruch erheben, auch gleichzeitig die anderen Aspekte mitzuerfassen. So könnten sich beispielsweise Zweifel an der Behauptung anmelden, die Beschäftigung mit den aufgeführten logischen Inhalten solle sich günstig z.B. auf

---

1 W. Servais (1968) S. 794 f

2 CIEAEM-Report

3 Es handelt sich um folgende Inhalte: Aussagen, Aussagenverknüpfungen, Wahrheitstafeln, Aussagenformen. Quantifizierte Aussagen. Negation quantifizierter Aussagen. Die Gleichheit.

den Sprachunterricht auswirken [1]. Ebensowenig ist klar, wie die Beschäftigung mit Sprachen unmittelbar formallogische Fähigkeiten beeinflussen, oder gar generieren könnte.

1 Vgl. CIEAEM-Report

2. Die mengentheoretisch-logizistische Auffassung von Logik

In den fünfziger und sechziger Jahren prägten im wesentlichen die Begriffe Menge, Abbildung, Struktur die didaktische Diskussion. Die damit verbundene Forderung nach einer strukturorientierten, mengentheoretisch fundierten (Neuen) Mathematik hat curriculare Richtungen für die Zukunft festgeschrieben, die heute in den neuen Lehrplänen und Richtlinien voll zur Geltung kommen [1], obwohl sich seit einiger Zeit eine kritischere Haltung gegenüber der Mengenlehre herauszubilden scheint. Einer breiten Entfaltung der instrumentalen Funktion der Logik steht, wie in den beiden folgenden Abschnitten gezeigt wird, die fast ausschließlich mengentheoretisch-logizistische Orientierung hemmend gegenüber.

Wie in den strukturorientierten Unterricht logische Elemente einzubringen sind, wird in zahlreichen Publikationen etwa in der Reihe "Logische Probleme im Mathematikunterricht" [2] sowie in weiteren Arbeiten von H.G. Steiner erörtert [3]. In einem Aufsatz von Steiner heißt es: "Es handelt sich also vorwiegend darum, die Begriffe Menge, konkrete Struktur, Abbildung, die die gesamte Mathematik und damit alle Bereiche durchziehen, die einer mathematischen Behandlung fähig sind, auch in der Schule thematisch zu machen. Bei dieser Behandlung wird sich ... der Begriff des mathematischen Gebildes herauskristallisieren, der den natürlichen Ansatz für die Axiomatik bietet ... Axiomensysteme sollen darüber hinaus aber vor allem Hilfsmittel zur Gewinnung von weiteren Sätzen über die Gebilde sein. Dazu müssen logische Hilfsmittel entwickelt werden. Auch diese Bemühungen können früh ansetzen und führen naturgemäß allmählich etwa bis zur Sprache der Prädikatenlogik und den wichtigsten Regeln des Prädikatenkalküls. Es ist ganz selbstverständlich, daß dabei auf eine semantische Fundierung, ... außerordentlich viel Wert gelegt werden muß." [4] An anderer Stelle schreibt Steiner: "Es ist schließlich aber auch notwendig,

---

1 Vgl. Unterrichtsempfehlungen zur Sekundarstufe I; Arbeitsmaterialien Berichte Sekundarstufe II Hrsg. Kultusministerium NRW (1973, 1972)

2 MU 4 (1959), 1 (1961), 5 (1967)

3 H.G. Steiner (1961), (1963)

4 H.G. Steiner (1959) S. 66

einfache Beispiele einer rein syntaktischen Behandlung einer axiomatischen Theorie zu geben. Dazu gehört freilich, daß der Schüler die Grundzüge einer logischen Syntax, d.h. eines Logikkalküls kennenlernt." [1] Die beiden Zitate beziehen sich auf den instrumentalen und den theoretischen Aspekt von Logik.

In einer Arbeit von 1961 zeigt Steiner Möglichkeiten zur logischen Vertiefung und Verbesserung des Mathematikunterrichts an im wesentlichen traditionellen Stoffen auf, die nun freilich unter "modernen Gesichtspunkten", d.h. unter mengentheoretischen Aspekten gesehen werden müssen. Die mengentheoretische Auffassung der Mathematik entspricht dem grundlagentheoretischen Standpunkt, den man häufig als den klassischen Standpunkt in der Mathematik bezeichnet, und der in seinen Wurzeln auf die Ontologie Platos zurückgeht. Hierzu schreibt Steiner: "Die von der klassischen platonischen Ontologie der Mathematik ausgehende semantische Begründung von Logik und Axiomatik scheint mir allgemein die angemessene wissenschaftliche Grundlage für ein in der Schule mögliches Vorgehen in Richtung auf das Verständnis der formalen Logik und der modernen strukturellen Auffassung der Mathematik zu sein." [2] Hieraus werden für den Unterricht zwei Hauptaufgaben abgeleitet: 1. Entwicklung der mengentheoretischen Grundbegriffe, 2. Herausarbeitung einer logischen Sprache, in deren Syntax einzuführen ist. Verbindendes Element zwischen Logik und Mengenlehre ist der Begriff der Aussageform. Die beschreibende Angabe von Mengen geschieht durch Aussageformen; studiert man deren gegenseitige Beziehungen zu den ihnen entsprechenden Erfüllungsmengen, so gewinnt man die Beziehung zwischen elementarer Mengenlehre und Klassenlogik [3]. Ein didaktischer Vorzug dieser Korrespondenz liegt in der Möglichkeit, schon auf dem Niveau der Primarstufe durch enaktive Operationen mit Mengen, logische Operationen mitzuüben bzw. die Behandlung der logischen Verknüpfung von Aussagen und Aussageformen auf mengentheoretische Veranschaulichungen zu stützen. Zur vollen Entfaltung kommt der Begriff Aussageform erst in der Lehre von den Gleichungen und Ungleichungen; die semantisch-mengentheoretisch fundierte Gleichungslehre wird auf diese Weise stark von logischen Elementen durchdrungen [4].

---

1 H.G. Steiner (1959) S. 75

2 ders. (1961) S. 179

3 Vgl. H. Griesel (1959) S. 114 ff

4 Vgl. hierzu die Arbeiten von H. Wäsche (1961), J. Lauter (1964), H. Hermes (1967)

Eine weitere Konsequenz der Verbindung von Mengenlehre und Klassenlogik ist die Erschließung der Wahrheitstafeln der aussagelogischen Junktoren auf dem Hintergrund der Mengenlehre. Zwar wird bei einem solchen Vorgehen, die bei einem systematischen Aufbau erforderliche Ordnung, nach der zuerst die Aussagenlogik entwickelt und dann mengentheoretische Begriffe definiert werden, verdreht. Für die Schule, räumt Steiner ein, kann dieses Vorgehen aber als legitim angesehen werden, weil es hier zunächst nicht auf eine eigenständige Begründung der Logik, sondern auf ihre Bereitstellung als Werkzeug ankommt[1].

Während die Semantik der aussagelogischen Junktoren an didaktischen Modellen (Venn - Karnaughdiagramme) noch überzeugend einsichtig gemacht werden kann, ist die Semantik der Quantoren zu einem Zeitpunkt, da man sie bereits im Unterricht verwenden will, an erhebliche Schwierigkeiten gebunden. Weder der verbale Rückgriff auf den Begriff der Allgemeingültigkeit (beim Allquantor) noch das von H.Freudenthal vorgeschlagene Verfahren, die Bedeutung von "für alle x gilt F(x)" durch $F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)$ ... festzulegen, helfen hier weiter. Vielmehr wird durch die mengentheoretisch semantischen Erklärungsversuche die Chance vertan, die Bedeutung des Allquantors und der übrigen logischen Zeichen durch ihre Verwendung innerhalb der Mathematik zu erhellen. Im Fall des Allquantors müßte z.B. seine Verbindung zu Beweisschemata aufgezeigt werden, was eine mengentheoretische Interpretation nicht zu leisten vermag.

Die mengentheoretisch orientierte Logik ist von ihrer Grundlage her, den Aussagen, in ihrer Konzeption statisch. Aussagen sind wahr oder falsch, je nachdem, welche logische Form sie haben und je nachdem, ob etwas Bestimmtes der Fall ist. Diese Auffassung sieht somit gänzlich von anderen sprachlichen Elementen, wie etwa der Frage, dem Befehl, oder davon ab, daß Aussagen behauptet, bestritten, zurückgenommen, angegriffen oder widerrufen werden können.

Dennoch bedeutet es insgesamt gegenüber der traditionellen Mathematik einen bedeutenden Fortschritt, daß nunmehr logische Probleme in der Didaktik überhaupt thematisiert werden.

---

1 H.G. Steiner (1963) S. 89

Anhang

An Hand der neuen Unterrichtsempfehlungen für die Sekundarstufe I/II der Gymnasien im Land NRW kann die mengentheoretisch-logizistische Auffassung von Logik belegt werden.
In Klasse 5 wird in Verbindung mit Mengenoperationen an mathematischen bzw. außermathematischen (!) Mengen eine "Propädeutik der mathematischen Logik bzw. stärkere(r) Formalisierung" [1] empfohlen, dabei wird eine Präzisierung der Worte "und" und "oder" angestrebt. Die folgende Bemerkung suggeriert den Eindruck, daß logische Zeichen nur unter dem Aspekt einer "gereinigten" Darstellungsform eingeführt werden:
Erst in Klasse 8 erscheint Logik unter dem Thema "Grundbegriffe der Aussagenlogik" wieder explizit im Stundenplan. An Einzelgegenständen sind aufgeführt:

1. Aussagen, Wahrheitswerte von Aussagen, Gleichungen und Ungleichungen als Aussagen.
2. Variablen, Aussagenformen, Gleichungen und Ungleichungen als Aussageformen.
3. Grundmengen und Lösungsmengen von Aussageformen, grafische Darstellung dieser Mengen.
4. Erfüllbare und nicht erfüllbare Aussageformen über einer Grundmenge.
5. Quantifizierung von Aussageformen.
6. Negation von Aussagen, konjunktive und diskonjunktive Aussagen.
7. Negierte, konjunktive und diskonjunktive Aussageformen und ihre Lösungsmengen.
8. Implikationsaussagen, Äquivalenzaussagen.

Bei den Erläuterungen zu 1. heißt es: "Bei einer normal ausgebildeten Klasse dürften die Schüler über eine Reihe von Grundkenntnissen aus der mathematischen Logik verfügen", die im folgenden zu präzisieren sind.
All- und Existenzquantoren tauchen unvermittelt bereits in der 7. Klasse auf.
"Bei der Darstellung der Gruppenaxiome ist zu beachten, daß hier

---

1 Für das folgende vgl. Mathematik, Unterrichtsempfehlungen Sekundarstufe I. Hrsg. Kultusministerium des Landes NRW.

All- und Existenzquantoren sowie Kombinationen der Quantorenauftreten. Eine Formalisierung wird nicht erwartet, kann aber erfahrungsgemäß als Kurzschreibweise ohne Schwierigkeit (!) gebracht werden." Der Kommentar zu 5. akzentuiert die Bindung von Variablen durch Quantoren, ferner wird die völlig unverbindliche Forderung aufgestellt "Der Schüler sollte außerdem erfahren (!), was erforderlich ist, um die Wahrheit einer All- oder Existenzaussage nachzuweisen oder zu widerlegen." Vergleicht man diese Ausführung mit den Erläuterungen zum Themenbereich Elementare Prädikatenlogik der 11. Klasse, in denen Gesetze wie $\bigwedge_x a(x) \rightarrow \bigvee_x a(x)$, $\neg \bigvee_x a(x) \longrightarrow \bigwedge_x \neg a(x)$ etc. behandelt werden sollen und wo empfohlen wird: "Die Gesetze für Aussagen mit Quantoren können an geeigneten Beispielen verdeutlicht und mit Hilfe von Wahrheitstafeln begründet werden, wobei man sich auf je 2 Aussageformen beschränkt: $\bigwedge_x A(x) \longleftrightarrow A(x_1) \wedge A(x_2)$ $\bigvee_x A(x) \longleftrightarrow A(x_1) \vee A(x_2)$ ....", so ist nicht zu erkennen, welche Art Beweis- oder Widerlegungsbegriff für quantifizierte Aussagen in der 8. Klasse gemeint sein könnte.

Logische Junktoren werden auf dieser Stufe über Wahrheitstafeln definiert; dabei werden sofort formale Aspekte der Aussagenverknüpfungen betont, wenn es heißt: "In Verbindung mit der Aufstellung von Wahrheitstafeln muß den Schülern deutlich werden, daß der Wahrheitswert der Gesamtaussage nur von den Wahrheitswerten der Teilaussagen und nicht von deren Inhalt abhängig ist." Die Verneinungstechnik bei konjunktiven, disjunktiven sowie quantifizierten Aussagen soll offensichtlich exemplarisch eingeübt werden.

Unter den Aufbaukursen für den Differenzierungsbereich ist ein auf 16 Wochen konzipierter unterrichtlich noch nicht erprobter Kurs "Ausgewählte Probleme der mathematischen Logik" angeboten, der eine vertiefte und erweiterte Behandlung der Themen des 8. Schuljahres vorsieht. Neben der Zielsetzung "die Grundlagen der Aussagenlogik ... stärker in das Bewußtsein der Schüler zu heben", soll "an Beispielen aus der Elementarmathematik oder auch an rein logischen Problemen, soweit sie der Altersstufe der Schüler angemessen erscheinen, ein erster vertiefender Einblick in die Bedeutung der Logik für die Mathematik und in die Grundregeln der gültigen Schlüsse eröffnet werden."

Diese Zielsetzungen würden erwarten lassen, daß nun die integrierende und instrumentale Funktion der Logik didaktisch akzentuiert wird,

statt dessen werden logistische Techniken weiter ausgebaut; als unmittelbare Anwendungen auf die Mathematik bringen die Lehrplanvorschläge den indirekten Beweis, Widerspruchsbeweise, Umkehrung und Kontraposition von Sätzen, modus ponens sowie die Transitivität der Implikation.

Besonders deutlich kommt die formal-logizistische Tendenz dieses Differenzierungskurses in seiner Motivation zum Ausdruck: "Eine kritische Untersuchung weist die Mängel der Umgangssprache auf, die sie für den Gebrauch in einer exakten Wissenschaft ungeeignet erscheinen läßt, wie etwa Redundanz, begriffliche Vieldeutigkeit ... Als Ausweg bietet sich eine normierte Kunstsprache an. Nur sie ist in der Lage, den Aufgaben der Wissenschaft gerecht zu werden [1]. Aber auch der Sprache der Wissenschaft kann man nicht blind vertrauen. Man muß lernen, sie reflektierend zu verwenden. Mit diesen Überlegungen ist die Motivation für das folgende umfassend gegeben."

Neben den o.g. Beweisverfahren werden unter dem Thema Beispiele logischer Probleme aus der Schulmathematik Paradoxien, Antinomien sowie die Analyse typisch falscher Schlußweisen genannt. Von echter Bedeutung und ein wertvoller Beitrag zur logischen Schulung scheint mir nur das letzte Problem zu sein; die beiden ersten sind zwar unter wissenschaftstheoretischen Gesichtspunkten interessant, da eine exakte Lösung auf diesem Niveau ohnehin nicht erfolgen kann, sind sie etwas Singuläres und ohne rechte Beziehung zu den wichtigen Problemen von Logik und Mathematik.

Der Eingangskurs (1. Halbjahr der 11. Klasse) in die Sekundarstufe II umfaßt die folgenden Generalthemen: 1. Elementare Aussagenlogik, 2. Elementare Prädikatenlogik, 3. Beweisverfahren, 4. Mengen, 5. Verknüpfungen auf einer Menge, 6. Relationen, Funktionen, 7. Reelle Zahlen. In Ergänzung zu bisherigem kommt zu 1. der Beweis aussagenlogischer Gesetze mit Hilfe von Wahrheitstafeln hinzu. Zu 2. wurde bereits oben eine Bemerkung gemacht. Bei 3. sind u.a. die Kennzeichnung des direkten und des indirekten Beweises, der Beweis der Formen des indirekten Schlusses durch Wahrheitstafeln sowie das Prinzip der vollständigen Induktion vorgesehen.

Außer zu Zwecken der Formalisierung und Symbolisierung werden die unter 1. und 2. genannten Themen, die auf einer breiten Basis in der

---

1 (!)

Sekundarstufe I ruhen, für die folgenden Grund- und Leistungskurse (mit Ausnahme des Kurses Boolesche Algebra) nicht explizit nutzbar gemacht, obwohl sich dazu reiche Gelegenheit bieten würde (vgl. 3. Kapitel).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die hier diskutierten Unterrichtsempfehlungen hinsichtlich der logischen Aspekte des Mathematikunterrichts in den beiden Sekundarstufen vollständig in der mengentheoretisch-logizistischen Auffassung von Logik verwurzelt sind[1].

---

1 Es wäre wünschenswert, wenn sich hierzu die Stimmen der konstruktiven Kritik schon vor dem amtlich werden dieser Richtlinien deutlich artikulieren würden. Zumindest sollte man eine Situation zu verhindern suchen, wie sie sich derzeit bei der didaktischen Diskussion um die Mengenlehre repräsentiert.

3. Die inhaltlich-instrumentale Auffassung von Logik

In der inhaltlich-instrumentalen Auffassung von Logik artikuliert sich ein Standpunkt, welcher über die im letzten Abschnitt angesprochenen Ansätze hinaus, auf eine noch engere Verbindung zwischen mathematischen bzw. fachspezifischen Inhalten und Logik abzielt. Genauer: logische Fähigkeiten sollen sich im Zusammenhang mit inhaltlicher Erkenntnisgewinnung entwickeln [1], wobei besonderer Nachdruck auf eine vielfältige Anwendung logischer Fähigkeiten und Fertigkeiten zu legen ist. Aufgrund experimenteller Untersuchungen kommt H. Siwek zu dem Schluß: "La théorie logique reste morte si en cours de l'enseignement de la mathématique on n'y revient pas, on ne l'applique pas systématiquement, si l'on néglige l'analyse logique des énoncés mathématiques: des définitions, des théorèmes, des démonstrations." [2] Einen interessanten Standpunkt hinsichtlich der Vermittlung logischer Kenntnisse nimmt N.Landa ein, dem es u.a. um eine gegenseitige Annäherung der instrumentalen und kognitiven Aspekte logischer Operationen geht. "Die Vermittlung von logischen Operationen kann nie ein "Überbau" des Unterrichts in irgendeinem Fach sein; die logischen Operationen existieren nicht getrennt von grammatischen, mathematischen und anderen Operationen. Sie sind ihr Bestandteil und werden durch sie realisiert. Der Begriff logische Operation ist eine Abstraktion. Sie ist insofern bedeutsam, als sie gestattet, das Allgemeine im menschlichen Denken unabhängig vom Inhalt, mit dem operiert wird, zu erschließen. Das Logische ist das Allgemeine im grammatischen, mathematischen und in jedem anderen Denken, sofern es die Wirklichkeit richtig widerspiegelt." [3] Nach dieser Auffassung sollen logische Operationen nicht formal, d.h. losgelöst von konkreten Inhalten, sondern beziehungshaltig-inhaltlich entwickelt werden.

Eine dazu konträre Meinung vertritt etwa W. Servais: "That which is important is to develop the logical concepts before one takes up questions where logic intervenes, for example, continuity, in order that there be no awkward superposition of logical difficulties upon the mathematical difficulties." [4]

---

1 Vgl. auch die Auffassung von L. Bronwer, daß "die Logik auf Mathematik beruhe und nicht umgekehrt."

2 H. Siwek (1973) S. 30

3 L. Landa (1969) S. 336

4 W. Servais (1968) S. 795

Das von Servais vorgeschlagene Verfahren ist die heute vielfach übliche Praxis sogenannter Logik-Kurse, in denen mit möglichst geringem Zeitaufwand (oder gerade deshalb) ein Ausschnitt aus dem fertigen System der formalen Logik elementarisiert behandelt wird, in der Hoffnung, daß dieses verkleinerte System formaler Logik nun auch angewendet werden könne.

Daß dieses Verfahren wenig funktionsfähig ist, wurde auch von anderer, mehr philosophisch orientierter Richtung erkannt. Im Vorwort zur "Logischen Propädeutik" heißt es: "Was wollen wir nun mit dieser "logischen Propädeutik"? ... Erfahrungsgemäß ist aber die Einübung in ihre Kalküle (Anm.: in die Kalküle der formalen Logik) ungeeignet, dem Philosophen oder Geisteswissenschaftler die Disziplinierung des Redens zu vermitteln, derer er so bitter nötig bedarf. Ein Theologe oder Kunsthistoriker, der es in einer Anfängerübung vielleicht bis zur konjunktiven Normalform des Aussagenkalküls gebracht hat, weiß damit hernach in seiner eigenen Wissenschaft begreiflicherweise nichts anzufangen." [1]

Der Weg, den Landa zur Vermittlung von Methoden logischen Denkens vor Augen hat, kann gegenüber dem am logischen System orientierten als genetisch bezeichnet werden. Um z.B. das logische Schema bzw. die kognitive Struktur syllogistischer Modi zu entwickeln, sollten Schüler in den verschiedensten Wissensbereichen mit konkreten Klassifizierungsproblemen konfrontiert werden, aus denen durch rückschauende Abstraktion und Analyse der zuvor geübten geistigen Tätigkeiten die Form des Syllogismus (die dann auch eventuell mit Variablen schematisiert wird) herausgearbeitet wird.

Landa geht es bei seinen Untersuchungen in erster Linie um eine allgemeine Theorie der Vermittlung von Systemen geistiger Operationen, insbesondere von Algorithemen der Denktätigkeit; er weist jedoch ausdrücklich darauf hin, daß der Begriff der Denkmethode umfassender ist, als der des Algorithmus. "Kann ein Mensch an den Gegenständen die allgemeinen Merkmale hervorheben, ihre logische Struktur bestimmen und die richtige und rationelle Reihenfolge von Operationen finden, kann er den Denkprozeß selbständig aufbauen, seine Aussagen streng logisch begründen und beweisen, dann verfügt er über bestimmte Denkmethoden. Nicht alle von ihnen sind jedoch Algorithmen." [2]

---

1 W. Kamlah, P. Lorenzen (1967) S. 5

2 N. Landa (1969) S. 341

Unter den genannten Beispielen für allgemeine Denkmethoden ist vor allem das in den beiden ersten Punkten angesprochene Schema des Identifizierens von Merkmalen wichtig. Die Fähigkeit zur Identifizierung von Merkmalen von Gegenständen ist eine notwendige Voraussetzung für die intellektuelle Grundfertigkeit des Klassifizierens. Soll die Zugehörigkeit von Objekten zu einer Klasse festgestellt werden, so müssen an den Objekten Merkmale ermittelt und mit den charakteristischen Merkmalen der Klasse verglichen werden. In den Identifizierungsprozeß geht aber insofern unmittelbar eine logische Komponente ein, als ein direkter Zusammenhang besteht zwischen der logischen Struktur der Merkmale von Erscheinungen und der Struktur von Operationen, die beim Identifizieren dieser Erscheinungen ausgeführt werden. Landa schreibt hierzu: "Dieser Zusammenhang ist insofern wesentlich, als man von einer gesetzmäßigen Übereinstimmung der logischen Struktur von Handlungen zum Identifizieren einer Erscheinung und der logischen Struktur ihrer Merkmale sprechen kann." [1] Somit ist bei Klassifizierungsproblemen stets ein logischer Aspekt zu berücksichtigen; umgekehrt kann der Vollzug von Klassifizierungen dazu dienen, die Bedeutung z.B. logischer Junktoren bewußt zu machen (wenn es sich um konjunktiv oder disjunktiv verknüpfte Merkmale handelt).

Unter didaktischen - wenn auch sehr allgemeinen - Gesichtspunkten behandeln Th. Neumann und M. Otte das Problem formaler und inhaltlicher Logik im Mathematikunterricht. Nach Neumann und Otte hat es die formale Logik, die reine Deduktion, stets schon mit fertigem Wissen zu tun und kann nicht den Übergang vom Noch-Nichtwissen zur Erkenntnis analysieren, während die inhaltliche Logik einen ausgeprägt erkenntnistheoretischen Charakter hat [2]. Von H. Scholz stammt die Charakterisierung: "Als Oberbegriff zur formalen und nicht-formalen Logik ist der Begriff einer Wissenschaftslehre zu denken, die definiert sein soll, als Lehre vom Rüstzeug der wissenschaftlichen Erkenntnisgewinnung im weitesten Sinne." [3]

"In unseren Schulen und Hochschulen dominiert nun ein Erklärungsbegriff,der Erklären auffaßt als formal-logisch ableiten, als rein

---

1 a.a.O. S. 142

2 Vgl. Th. Neumann, M. Otte (1971)

3 Zit. n. Th. Neumann und M. Otte (1971)

deduktiv reproduzieren ... Ein solcher Erklärungsbegriff reduziert den Erkenntnisprozeß auf die Transformation von Aussagen in andere Aussagen innerhalb eines vorgegebenen begrifflichen Niveaus. Lernen erscheint hier somit als Anpassung an bestimmte vorgegebene Ebenen. Dadurch geht jede Möglichkeit verloren, den Zusammenhang zwischen dem Inhalt des Unterrichtsfaches und der Art und Weise seiner Organisierung im Aneignungsprozeß, im Lernprozeß zu realisieren." [1] Man würde in das andere Extrem verfallen, wollte man das Deduktive im Mathematikunterricht in den Hintergrund drängen. Vielleicht rühren manche Mißverständnisse zu diesem Punkt davon her, daß man den Begriff Deduktion häufig als etwas Globales, wie etwa das Deduzieren von Sätzen aus einem Axiomensystem, versteht. Ein mehr lokaler Aspekt der Deduktion - die syntaktische Folgerung - besteht im regelhaften, schematischen Umformen von Zeichenreihen und spiegelt den kalkulatorischen Aspekt von Mathematik [2] wider. Dieser spezifisch mathematische Aspekt, der in gewissen Bereichen z.B. der protologischen Kalkültheorie frei von formaler Logik im Sinne etablierter Logiksysteme ist, sollte im Rahmen einer inhaltlichen Logik stärker akzentuiert werden.

Deutlich kommt die inhaltlich-instrumentale Auffassung von Logik in einer Diskussion zwischen M. Exner und J. Hilton zum Thema "Should Mathematical Logic be taught formally in Mathematics classes?" [3] zum Ausdruck. Hilton unterstreicht die Rolle der Logik als Dienerin der Mathematik und wendet sich dagegen, daß sie zu deren Meister erklärt wird. Daher distanziert er sich auch von jedem übertriebenen Formalismus, zumal der mathematische Forschungsprozeß (!) - d.h. also nicht die bereits fertige Mathematik - selbst von intuitivem und spekulativem Vorgehen beherrscht wird.

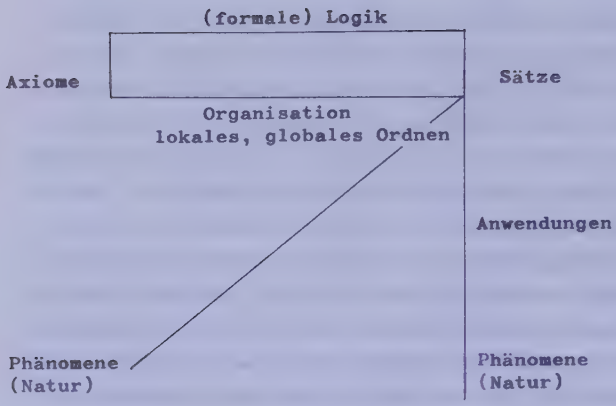
B. Allendorfer beschreibt diese Situation im folgenden (leicht modifizierten) Diagramm.

---

1 a.a.O. S. 1122

2 "Mathematik als Kalkül"

3 M. Exner, J. Hilton (1971)



Zunächst trachtet man im Bereich der Phänomene - Allendorfer verwendet hierfür den Begriff Natur - Beziehungen aufzuspüren, dann werden Sätze aufgestellt (guess theorems), aus denen man weitere zu gewinnen sucht, deren Gültigkeit via Anwendung überprüft wird. In dieser Phase gilt: "Axioms, logic and rigor are thrown to the winds and we become intoxicated with our success and open to dreadful errors." Die Produkte dieser intuitiven Phase sind unorganisiert, stets spekulativ und vielfach falsch. Erst wenn genügend inhaltliches Material vorhanden ist, wird es unter logischen Aspekten strukturiert, organisiert und zu einer Theorie verwoben. Auf dieser Stufe etablieren sich mathematische Modelle; den Vorgang der Modellbildung beschreibt Allendorfer mit farbigen Worten: "The details of this process go on in our seminars and in our discussions in the corridors ... but never appear in print (!). Hence the inner circle of creative mathematicians have the well-kept trade secret that in great many cases theorems come first and axioms second. This process of justifying a belief by finding premises from which it can be deduced is shockingly similar to much reasoning in our daily lives, and it is somewhat embarrassing to me to realize that mathematicians are experts at this art."

Gemeinsam wenden sich Exner und Hilton gegen den ermüdenden Gebrauch von Wahrheitstafeln und Venndiagrammen; nach Ansicht Hiltons ist übertriebener Formalismus meist mit einem übergroßen Anteil an Mengenlehre gekoppelt. "Too often the effect, when one compares the

new curriculum with the old, is to replace a tedions but useful stereotype, the old-fashioned number drill, by a tedions but useless stereotype, the new-fangled set-theory drill (Hilton)." [1]

Die instrumentale Auffassung von Logik kommt in der Forderung Hiltons zum Ausdruck, die Techniken des indirekten Schlusses, u.a. bei All- und Existenzsätzen, die Verwendung von Gegenbeispielen und die Methode der vollständigen Induktion explizit zu lehren.

Exner fordert, daß dem Schüler Hilfsmittel an die Hand gegeben werden, mit denen er sich von der Richtigkeit seiner eigenen mathematischen Tätigkeit überzeugen kann. Diese Hilfsmittel logischer Art, die Exner allerdings nicht näher spezifiziert, sollen der Prüfung der Wahrheit, Gültigkeit und Begründetheit von Argumentationen dienen und lassen sich daher der Kategorie Urteilsfähigkeit unterordnen.

Eine Charakterisierung des taxonomischen Begriffs Urteilsfähigkeit gibt Lenné; danach umfaßt er alle Kenntnisse, Einsichten und Routinen, die dazu dienen, Wahrheit oder Gültigkeit von Behauptungen sowie deren Reichweite oder Gültigkeitsbereich abzuschätzen [2].

Auf die Mathematikdidaktik bezogen heißt das, daß gefragt werden muß,"welche Formen der Urteilsfähigkeit mit speziellen Beweisformen, logischen Mitteln und auch mit anderen mathematischen Verfahren bewußt gemacht und miteingeübt werden ..." [3] Der Herausbildung einer kritischen Haltung sowie der Förderung der Urteilsfähigkeit kommt im Hinblick auf das allgemeine Lernziel Argumentationsfähigkeit [4] Bedeutung zu.

An Formalem hält Exner ein Verständnis der logischen Partikel, sowie der Begriffe Konsistenz und Modell für angemessen; ferner sollte der Schüler eine grundsätzliche Vorstellung von mathematischer Strenge besitzen, seine Beweise auf einem den jeweiligen Umständen entsprechenden Symbolisierungsniveau führen können, und bei der Analyse mathematischer Texte formale Beweisschritte von der Art großzügigem und vorläufigem Denken unterscheiden können, aus dem Vermutungen und Ideen für wesentliche Beweisschritte entstehen.

Wie aus den bisherigen Ausführungen hervorgeht, ist der Rahmen für

---

1 a.a.O. S. 393

2 Vgl. Lenné (1969) S. 232

3 a.a.O. S. 232

4 Vgl. H. Winter (1972) S. 71

Beziehungen zwischen J.Piagets genetischer Erkenntnistheorie der Logik und P.Lorenzens operativer Begründung von Logik und Mathematik.

In einem Aufsatz über die Ziele der operativen Mathematik und Logik schreibt Chr. Thiel: "Die operative Begründung der Mathematik ist nicht zu verwechseln mit der in der Rechendidaktik so genannten "operativen" Methode, wie sie vor allem von J.Piaget und H.Aebli vertreten wird. Mit der Forderung nach einer klaren Trennung beider Bedeutungen soll die Möglichkeit gewisser Beziehungen zwischen ihnen nicht bestritten werden; eine Untersuchung dieser Frage steht aber unseres Wissens nach noch aus." [1]

Zunächst muß festgehalten werden, daß die operativen Elemente der genetischen Psychologie bzw. Erkenntnistheorie Piaget zwar den Hintergrund für die im wesentlichen von H.Aebli und A.Fricke für die Rechendidaktik geschaffene operative Methode (operatives Prinzip) abgeben, die Forschung Piagets jedoch nicht unmittelbar didaktisch orientiert ist. Damit erfährt das von Thiel angesprochene Problem eine Ausweitung, indem bei der Untersuchung möglicher Beziehungen zwischen den genannten Bedeutungsaspekten - dem mathematischen und dem didaktischen Aspekt - nun auch dem erkenntnistheoretischen Aspekt des Terminus "operativ" Rechnung getragen werden muß.

Die folgenden Ausführungen sind in erster Linie den Beziehungen zwischen operativer Logik und den operativen Elementen der genetischen Erkenntistheorie der Logik gewidmet. Beziehungen zwischen einem speziellen Teil der operativen Logik und der operativen Methode bzw. dem operativen Prinzip werden im 2. Kapitel untersucht.

Die Klärung der Frage nach den Beziehungen zwischen den in der formalen Logik beschriebenen Strukturen und den Strukturen des Denkens wurde in der Tradition seit der Entwicklung einer experimentellen Psychologie in vielfältiger Weise angegangen. Die ursprüngliche Nichtunterscheidung zwischen Logik und Psychologie, die gleichermaßen von der klassischen Logik und der philosophisch orientierten Psychologie vertreten wurde [2], ist in der sich entwickelnden experimentellen Psycho-

---

1 Chr. Thiel (1970) S. 53

2 Hierzu Piaget (1966) S. 34: "Aristoteles glaubte zweifellos eine Naturgeschichte des menschlichen Geistes zu schreiben, als er die Gesetze des Syllogismus formulierte."

logie durch Ausschaltung logischer Faktoren und die Beschränkung auf Begriffe und Mechanismen wie Assoziation, Abbild, Empfindung etc. zunächst überwunden worden. Als Reaktion auf diesen Ansatz läßt sich die Denkpsychologie erklären, die im Denken ein Abbild der Logik erkennt und die Logik zur Erklärung psychologischer Fakten benutzt ("Logizismus"). Dieser methodischen Richtung steht in der Logik der Psychologismus gegenüber, der durch die Einbeziehung psychologischer Fakten in logische Untersuchungen gekennzeichnet ist.
Im Zuge der weiterentwickelten Formalisierung innerhalb der Logik spielten Fragestellungen über die Beziehungen zwischen logischen und psychologischen Strukturen eine mehr und mehr untergeordnete Rolle. Vom Standpunkt einer formalisierten axiomatischen Logik scheint es einsichtig zu sein, dieses Instrument allein auf Prozesse der mathematischen Deduktion anzuwenden, da jede andere Form des Denkens wie Bernays meint, lediglich approximativer Natur ist.
Die Frage nach dem ontologischen Status der logischen Strukturen führt unmittelbar in die Erkenntnistheorie.
B. Russells extrem logizistischer Standpunkt stellt nach Piaget das Maximum an möglicher Unterwerfung der Psychologie unter die Logistik dar. Durch die geistige Funktion der sog. Konzeption vermag der Mensch die den sinnlichen Gegenständen entsprechenden Universalien, die unabhängig vom Denken des Subjekts existieren, aufzunehmen. "Die Gesetze, welche die Universalien bestimmen und ihre Beziehungen ordnen, gehören ausschließlich der Logik an, und die Psychologie kann diese bereits bestehenden und ihr fertig vorgelegten Erkenntnisse nur noch anerkennen." [1] Der im Logizismus unternommene Versuch der Begründung der Mathematik durch die Logik akzentuiert demnach am stärksten eine vom Subjekt unabhängige Mathematik. Die Zurückführung der Mathematik auf die Logik ist natürlich nur unter der Voraussetzung sinnvoll, daß die Begriffe und Methoden der Logik etwas vollkommen Gesichertes sind. Wie bereits dargelegt wurde, kann nach Auffassung des Logizismus das erkennende Subjekt an dem von seinem Bereich getrennten der Universalien durch das vermittelnde geistige Instrument der Konzeption teilhaben. Die hauptsächliche Aktivität des Subjekts besteht im Prozeß des Erkennens bzw. Wiedererkennens.
Von ganz anderer Natur ist die Deutung des ontologischen Status logi-

---

1 J. Piaget (1966) S. 23

scher Gegenstände im Konventionalismus. Diese erkenntnistheoretische Richtung betont gegenüber dem Logizismus den konstruktiven Aspekt der Erkenntnisfunktion.

Die konventionalistische Lösung des Problems des Wesens logischer Gegenstände geht davon aus, daß die Existenz logischer Entitäten und Gesetze auf Konventionen oder allgemein anerkannten Regeln beruhe. Diese Erklärung wirft jedoch das Problem auf, weshalb diese Konventionen in so guter Übereinstimmung mit den realen Sachverhalten stehen. Eingehend setzt sich Piaget mit dem Standpunkt des logischen Positivismus auseinander, der in den logischen und mathematischen Gebilden nichts anderes als spezielle sprachliche Strukturen sieht. Im logischen Positivismus, der stark den logischen Empirismus beeinflußt hat, unterscheidet man zwischen empirischen Wahrheiten und tautologischen oder rein syntaktischen Beziehungen, die durch geeignete semantische Interpretation empirischer Wahrheiten auszudrücken in der Lage sind. Hierzu Piaget: "We have here, for the first time a theory having psychological significance which may be tested empirically." [1] So kann überprüft werden, ob Kinder, bevor die Sprachentwicklung begonnen hat, ein in irgendeinem Sinn logisches Verhalten zeigen. Oléron hat gezeigt, daß man bei taubstummen Kindern Denken ohne Sprache und logische Strukturen ohne Sprache findet[2].

Einen weiteren Einwand gegen die positivistische Deutung bringt Piaget in "Logic and Psychology" :"... we cannot speak about pure experience or "empirical truth" apart from logical relationships. In other words, experience cannot be interpreted in abstraction from the conceptual and logical apparatus which makes such an interpretation possible."[3] Mit diesen Worten hebt Piaget deutlich seine eigene erkenntnistheoretische Position von den skizzierten ontologischen Standpunkten ab. Die Bezugnahme auf kognitive Strukturen des Subjekts, die, wie die Experimente von Piaget und Inhelder mit Kindern gezeigt haben, abhängig von deren Entwicklung sind, bringt die genetische Dimension in die Erkenntnistheorie der Logik. Allgemein bestehen nach Piaget die Aufgaben einer genetischen Erkenntnistheorie darin, wissenschaftliches

---

1 J. Piaget (1953) S. 4

2 Vgl. J. Piaget (1973) S. 55

3 J. Piaget (1953) S. 4

Erkennen durch seine Geschichte, seine Soziogenese und vor allem die psychogenetischen Ursprünge der Begriffe und Operationen auf denen es beruht, zu erkennen und Formalisierungen - insbesondere logische Formalisierungen - die sich auf äquilibrierte Denkstrukturen beziehen, in Betracht zu ziehen [1].

Anders als die drei angeführten ontologischen Standpunkte bietet für Piaget der von Bridgeman vertretene Operationalismus eine Grundlage, auf der sich Logik und Psychologie treffen können: "Operations (in spite of Couturat!) play an indispensable rôle in logic since logic is based on an abstract algebra and made up of symbolic manipulations. On the other hand operations are actual psychologicul activities, and all effective knowledge is based on such a system of operations." [2]

In seiner Kritik am logischen Positivismus vertritt Piaget die Auffassung, daß "die Bildung der logischen und mathematischen Strukturen im menschlichen Denken sich nicht allein aus der Sprache erklären läßt, sondern ihre Wurzeln in der allgemeinen Koordination von Handlungen hat." [3]

Dieser operative Standpunkt soll im folgenden kurz skizziert werden. Piaget unterscheidet zwei Aspekte des Denkens. Der figurative Aspekt wird durch die Imitation von als statisch aufgefaßten äußeren Zuständen charakterisiert. Wahrnehmung, Nachahmung und geistiges Vorstellen sind figurative Funktionen im kognitiven Bereich. Dagegen bezieht sich der operative Aspekt des Denkens nicht auf statische Zustände sondern auf Transformationen von einem Zustand in den anderen. "Er umfaßt die Objekte oder Zustände transformierenden Handlungen selbst ebenso, wie die intellektuellen Operationen, die im Grunde Transformationssysteme darstellen." [4]

Nach Piaget sind die figurativen Aspekte stets den operativen Aspekten des Denkens untergeordnet, der wesentliche Aspekt des Denkens ist somit der operative und menschliches Erkennen ist wesentlich aktiv. "Erkennen heißt, Realität an Transformationssysteme zu assimilieren. Erkennen heißt, Realität zu transformieren, um zu verstehen, wie ein bestimmter Zustand zustande kommt." [5] Andererseits bedeutet Erkennen

---

1 Vgl. J. Piaget (1973) S. 7

2 J. Piaget (1953) S. 7

3 J. Piaget (1973) S. 28

4 a.a.O. S. 22 Diese Transformationssysteme heißen Gruppierungen.

5 J. Piaget (1973) S. 22

aber auch die Konstruktion bzw. Anpassung von Transformationssystemen an die Realität (Äquilibrationstheorie).

Für die Beantwortung der Frage, wovon logische und mathematische Erkenntnis abstrahiert ist, gibt es zwei Möglichkeiten. Die sogenannte einfache Abstraktion besteht in der Einwirkung auf das Objekt; in diesem Fall liegt der Ursprung der Erkenntnis im Objekt. Der zweite Typus - die sogenannte reflektive Abstraktion (abstraction réfléchissante) - besteht darin, von den auf das Objekt einwirkenden Handlungen oder Operationen zu abstrahieren. "Mir scheint" sagt Piaget, "daß dies die Grundlage der logischen und mathematischen Abstraktion ist." [1] Wie Piaget im einzelnen an der Genese des Zahlbegriffs belegt, werden durch Handlungen bzw. Operationen zur Realität neue Elemente hinzugefügt und mit diesem Hinzufügen - als einem konstruktiven Akt - beginnt die eigentliche Schöpfung mathematischer Theorien [2].

Die Ontogenese logischer Operationen beschreibt Piaget in der sogenannten Stufentheorie der menschlichen Entwicklung. Der genetische und operative Kern dieser Theorie kommt prägnant in der folgenden Charakterisierung zum Ausdruck: "Kurz, der wesentliche Charakter des logischen Denkens besteht darin, daß es operativ ist, d.h. aus dem Tun hervorgeht, indem es dieses verinnerlicht." [3] Die Wurzeln logisch-mathematischer Strukturen reichen in die senso-motorische Intelligenz hinein [4], die ihre eigene Logik hat - eine Logik der Aktion. "Die Aktionen oder Handlungen, die die sensomotorische Intelligenz ausmachen, können wiederholt und generalisiert werden... All das an einer Aktion, was wiederholbar und generalisierbar ist, nenne ich einen Plan, und ich vertrete die These, daß es eine Logik der Pläne gibt. Zwar ist in einem Plan als solchem kein logisches Element enthalten, aber Pläne können miteinander koordiniert werden und implizieren somit die allgemeine Koordination von Aktionen. Diese Koordinationen bilden eine Logik der Aktionen, die ihrerseits den Ausgangspunkt für die logisch-mathematischen Strukturen darstellt." [5] An Stelle von

---

1 J. Piaget (1973) S. 24

2 Vgl. J. Piaget $(1972)_1$ S. 113, 12o, 322

3 J. Piaget (1966) S. 4o

4 Tatsächlich kann, wie Piaget meint, der "Anfang" logischer Strukturen noch weiter zur neuronalen Koordination zurückverfolgt werden.

5 J. Piaget (1973) S. 5o f

"Plan" hat sich der Terminus Handlungsschema durchgesetzt. Auf der Stufe der konkreten Operationen bilden sich aus speziellen Handlungsschemata die sogenannten operativen Schemata, die durch Gruppierungen beschrieben werden können. Die "konkret" genannten Operationen dieser Stufe beziehen sich direkt auf materielle Objekte oder deren Bilder und werden in effektiven bzw. verinnerlichten Handlungen repräsentiert; sie sind jedoch noch nicht in ein strukturiertes Ganzes (structured whole) integriert, was der Grund dafür ist, daß auf dieser Stufe sich eine formale Logik noch nicht etablieren kann.
Das formale Denken auf der Stufe der formalen Operationen wird nach Piaget durch die Aussagenlogik gekennzeichnet, die im Gegensatz zur Logik der konkreten Operationen eine "operative Logik vom zweiten Grad ist." [1] "Tatsächlich ist 1. der Inhalt jeder Aussage eine (intrapropositionelle) Operation, die aber verbal ausgedrückt und nicht als Handlung ausgeführt wird." [2] Hieraus resultiert der Unterschied zwischen dem logischen Inhalt einer Aussage, - der aus logischen Operationen besteht, die sich auf die vorhandenen Klassen oder Relationen beziehen - und deren extralogischen Inhalt, auf den sich der logische Inhalt bezieht: es sind dies die möglichen Handlungen, von denen diese Klassen- oder Relationsoperatoren die verinnerlichte Form darstellen. Ferner werden 2. "die somit inhaltlich schon operativ gewordenen Aussagen gemäß einer Gesamtheit von interpropositionellen Operationen kombiniert (Implikation, Widersprüche, Alternativen etc.), die sich nicht mehr auf die Klassen und die in jeder Aussage enthaltenen Relationen beziehen, sondern auf die gegenseitige Beziehung der Aussagen: es sind also Operationen, die sich (jedoch im zweiten Grad) auf die primären Operationen beziehen, die durch die Aussagen formuliert werden." [3]
Wenn Piaget die Aufgabe der Psychologie der Intelligenz darin sieht, "die Gesamtheit der formalen Operationen wieder in ihren wirklichen Rahmen einzufügen und zu beweisen, daß sie nur in dem Maß eine geistige Bedeutung und einen bestimmten Sinn haben können, als sie sich auf die konkreten Operationen stützen, die sie gleichzeitig vorbereiten und ihnen ihren Inhalt geben" [4], so kann dies auch als didaktische

---

1 J. Piaget (1972)$_1$ S. 215 ff

2 ebd.

3 a.a.O. S. 218

4 J. Piaget (1966) S. 169

Forderung verstanden werden, die konkreten Korrelate zu formalen Operationen bewußt zu machen, allgemeiner, Maßnahmen zu entwerfen, welche die Begriffsbildung auf der Grundlage konkreter Handlungen ermöglichen. In pointierter Weise beschreibt H.Winter diese didaktische Aufgabe. "Der Übergang von den praktischen Modellsituationen (in denen mit konkreten Dingen gehandelt wird, Anm.d.Verf.) zu den (mathematischen) Begriffen und der umgekehrte Vorgang sind Grundanliegen der didaktischen Bemühungen und Kern mathematischen Lernens." [1] Daran anschließend charakterisiert Winter das Handeln als das "invariante Moment zwischen praktischer Situation und Begriffssystem" und zwar "im didaktischen Modell das äußerliche (effektive Anm.d.Verf.) Handeln mit konkreten Dingen, im Begriffssystem das verinnerlichte Handeln, das letztlich nur noch in Zeichen "verkörpert" ist." [2]
Diese Ausführungen bringen einen Aspekt der Beziehungen zwischen operativen Elementen der Psychologie der Intelligenz und der operativen Methode zum Ausdruck, nämlich die Fundierung formaler durch konkrete Operationen. Ein weiterer Aspekt, die Aufgabe, Unterrichtsmaßnahmen zu entwerfen, welche die Ausbildung von Gruppierungen fördern (operatives Prinzip) wird im 2. Kapitel erörtert.
Die erkenntnistheoretische Diskussion von Logizismus und logischem Positivismus erbrachte für die Erkenntnistheorie der Logik die Notwendigkeit der Auseinandersetzung mit der Psychologie. Zwei neue Ergebnisse in der logischen Forschung haben nach Piaget diese Auseinandersetzung wieder belebt. Es handelt sich dabei einerseits um die erkenntnistheoretischen Probleme, die sich aus der Vielfalt (konstruktions-) möglicher Logiken ergeben - die Lage ist vergleichbar der grundlagentheoretischen Situation in der Geometrie bei der Entdeckung nichteuklidischer Geometrien - andererseits dreht es sich um die Konsequenzen aus den Gödelschen Theoremen, in denen Piaget die Entdeckung der Grenzen der Formalisierung sieht [3]. Beide Resultate ordnen sich dem Begründungsproblem der Logik unter. "Aus dieser Vielfalt der Logiken folgt, daß keine ergiebig genug ist, die Gesamtheit der Logik zu "begründen", und daß ihre Vielzahl selber zu disparat ist, dieses Ziel zu erreichen. Der Logiker fragt sich deshalb, wie er die Logik

---

1 H. Winter (1970) S. 165

2 ebd.

3 Vgl. J. Piaget $(1972)_2$ S. 180

konstruiert, und das heißt, die Psychologie der Logiker selbst und die Geschichte ihrer Konstruktionen befragen." [1]
Vergleicht man diese Ausführung mit der allgemeinen Zielsetzung der genetischen Erkenntnistheorie, so kann die o.g. Fragestellung als Thematisierung des genetischen Begründungsproblems gedeutet werden. Informell kann der Inhalt der beiden Gödeltheoreme wie folgt wiedergegeben werden: 1. Jedes widerspruchsfreie System, das genügend reichhaltig ist, um die elementare Arithmetik zu enthalten, ist unvollständig, d.h. es gibt in ihm unentscheidbare Sätze, 2. mit den Mitteln des Systems selbst kann dessen Widerspruchsfreiheit nicht nachgewiesen werden. Insbesondere hat Gödel gezeigt, daß der Beweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik durch die Mittel der Russellschen Logik nicht zu erbringen ist. Vielmehr sind, wie Gentzen gefunden hat, "stärkere" Mittel (wie die transfinite Induktion) erforderlich, um diese Aufgabe zu lösen. In seiner positiven Deutung der Gödelschen Resultate hebt Piaget deren konstruktiven Gehalt hervor. Aus den Gödel-Theoremen folgt, "daß einer menschlichen Intelligenz, wenn man darunter diejenige versteht, die die Wissenschaft begründet, und nicht die, die sie - einmal geschaffen - ins Reich der platonischen Ideen entrückt, das System der deduktiven Theorien nicht mehr als eine Pyramide erscheint, die auf einer unerschütterlichen oder zumindest fertigen Basis mit übereinander angeordneten Stufen ruht, deren jede ihrerseits endgültig ist, sondern als eine progressiv sich entwickelnde Konstruktion, deren Stufen jeweils Lücken aufweisen, die auf der nächstfolgenden geschlossen werden - das alles aber ohne Ende." [2] An anderer Stelle ersetzt Piaget das Bild vom pyramidenförmigen Aufbau von Theorien durch ein mystisch erscheinendes Bild: "Wird aber die Einfachheit (Begründung einer Theorie durch einfachere; Anm.d.Verf.) ein Zeichen von Schwäche, und muß man, um ein Stockwerk zu konsolidieren, das nächste errichten, so ist die Konsistenz der Pyramide in Tat und Wahrheit von ihrer Spitze her gegeben, und zwar von einer in sich unvollendeten Spitze, die ständig erhöht werden muß: das Bild von der Pyramide muß ersetzt werden durch das einer Spirale mit Windungen, die mit zunehmender Höhe immer weiter werden." [3]
Die historisch erste Lösung findet die Frage nach dem Woher mathema-

---

1 Vgl. J. Piaget $(1972)_2$ S. 18o

2 a.a.O. S. 18o f

3 a.a.O. S. 18o

tischen Wissens in der griechischen Philosophie. Es gibt Axiome, deren Wahrheit jedem, der an den grundlegenden Ideen der Zahl, des Punktes etc. teil hat, "evident" ist. Bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts war man seit den klassischen Griechen der Überzeugung, im Besitze der einzig richtigen Fundamente der exakten Wissenschaften (Logik, Geometrie, Arithmetik, Mechanik) zu sein. Mit den Untersuchungen über das Parallelenaxiom, aus denen die Möglichkeiten nichteuklidischer Geometrien hervorgegangen sind, ist der Glaube an Erkenntnis durch Evidenz stark erschüttert worden. Dadurch stellte sich die Frage nach den Wurzeln der exakten Wissenschaften jetzt auch als brennendes Problem innerhalb der Mathematik.
Seit den operativen Ansätzen H. Dinglers zur Begründung von Arithmetik und Geometrie, spätestens jedoch seit deren systematischen Ausbau und Übertragung auch auf das Gebiet der Logik durch P. Lorenzen hat das Begründungsproblem der Logik eine neue Richtung bekommen, die einerseits den oben wiedergegebenen Standpunkt Piagets zu diesem Problem revisionsbedürftig erscheinen läßt, die sich aber andererseits auf überraschende Weise dem operativen Gesamtkonzept der Piagetschen Erkenntnistheorie stimmig einordnet.
Sowohl die logizistische als auch die von Hilbert initiierte formalistische Begründung der Mathematik haben sich aufgrund der Resultate von Gödel als prinzipiell undurchführbar erwiesen. Die Ansätze des Intuitionismus mit dem Akzent auf der Konstruierbarkeit mathematischer Gegenstände, sind teilweise dunkel und nur unter der Annahme der Brouwerschen Auffassungen von Philosophie und Sprache verständlich [1].
Zwischen dem formalistischen und dem intuitionistischen Ansatz gibt es ein gemeinsames operatives Element. Eine formalisierte Theorie wird mit ihren Axiomen und logischen Regeln als ein Kalkül (Kodifikat) betrachtet. Diese Kalküle sind der Gegenstand metamathematischer Untersuchungen,in denen ihre Widerspruchsfreiheit bewiesen werden soll. Jede Handhabung einer logischen Schlußregel kann formal als eine Operation aufgefaßt werden, ebenso wie jede intuitionistisch zulässige Konstruktion. Auf weitergehende Berührungspunkte zwischen Formalismus und Intuitionismus soll hier nicht eingegangen werden [2].
Der Gedanke für eine operative Begründung der Mathematik ist der fol-

---

1 Vgl. P. Lorenzen (1969) S. 3

2 Vgl. hierzu P. Lorenzen (1969), (1962)

gende. Da aus der Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Logik in trivialer Weise die Widerspruchsfreiheit der klassischen Logik bewiesen werden kann, würde eine Begründung der intuitionistischen Arithmetik leicht die klassische Arithmetik als eine brauchbare Erweiterung begründen . Das Hauptproblem besteht somit darin, eine Begründung der formalisierten intuitionistischen Logik anzugeben, da das Problem der Angabe eines konstruktiven Modells für die arithmetischen Axiome einfach zu lösen ist.

Gegenstand der operativen Mathematik, deren Ziel u.a. die Begründung der intuitionistischen Logik (und Rechtfertigung der klassischen Logik) ist, sind beliebige Kalküle. Unter einem Kalkül versteht Lorenzen ein System von Regeln zum Operieren mit Figuren; diese Figuren können Schreibfiguren oder Steinchen (calculi) sein. Lorenzen schreibt: "Wir beschränken uns hier nur deshalb auf Schreibfiguren, weil diese am bequemsten sind, um daran das Operieren nach Regeln,auf das der Terminus "operativ" als das allein Wesentliche hinweisen soll, zu studieren." [1]

Nachdem der Gegenstand der operativen Mathematik präzisiert ist, führt die Absteckung des methodischen Rahmens dahin, sich auf "definite" Aussagen zu beschränken.

Lorenzen definiert den Begriff der Definitheit von Aussagen folgendermaßen induktiv: "Jede durch schematische Operationen [2] (in einem Kalkül) entscheidbare Aussage heiße definit. Ist für eine Aussage ein definiter Beweis- oder Widerlegungsbegriff festgelegt, so heiße auch die Aussage selbst definit, genauer beweisdefinit bzw. widerlegungsdefinit." [3] Ein wesentlicher Gesichtspunkt der Forderung der Definitheit von Aussagen ist die Verbindung zwischen sprachlicher Ebene (formale Operationen im Piagetschen Sinn) und der Ebene konkreter Handlungen. Ein entsprechendes Verfahren dient in der logischen Propädeutik zur Rekonstruktion "erster" Prädikatoren. Die Bedeutung der Definitheit besteht in der Kontrollierbarkeit sprachlicher Handlungen [4] durch konkrete Handlungen. Unter didaktischen Aspekten kommen wir darauf im 2. Kapitel zurück.

---

1 P. Lorenzen (1969) S. 4 ; Hervorhebung vom Verf.

2 "Schematisches" Operieren wird synonym zu regelhaftem Operieren verwendet.

3 a.a.O. S. 5 f

4 Z.B. dem Behaupten logisch verknüpfter Aussagen.

Beim schematischen Operieren mit Kalkülen ergeben sich zwei grundlegende Fragestellungen. Die eine richtet sich auf die Frage nach der Ableitbarkeit von Figuren - sie kann durch Angabe einer Ableitung durch regelhaftes Operieren mit Figuren entschieden werden, die andere zielt auf die Zulässigkeit von Erweiterungen von Kalkülen [1] durch zusätzliche Regeln ab - sie kann durch Operieren gemäß sogenannter Eliminationsprinzipien, die Gegenstand der Protologik sind, beantwortet werden.

Während sich bisher in recht allgemeiner Weise als verbindendes Element zwischen den operativen Theorien von J. Piaget und P. Lorenzen das Moment der Handlung abgezeichnet hat, können wir nunmehr die Art der Beziehungen zwischen diesen Theorien präzisieren.

Der entscheidende Punkt für die Beziehung zwischen Piagets Erkenntnistheorie der Logik und Lorenzens operativer Begründung der (intuitionistischen) Logik besteht darin, daß das schematische Operieren in Kalkülen zum Gegenstand der Untersuchung gemacht und die Axiome der Logik durch Abstraktion von den Handlungen [2] her begründet werden.

An einem einfachen Beispiel soll das verdeutlicht werden. Es geht um die operative Begründung der Transitivität der logischen Implikation. Fügt man zu einem beliebigen Kalkül die Regeln $A \longrightarrow B$ und $B \longrightarrow C$ hinzu, dann ist in diesem erweiterten Kalkül die Regel $A \longrightarrow C$ zulässig. Die Gewißheit dieser Zulässigkeit, schreibt Lorenzen, erwirbt man nicht dadurch, daß man Lehrbücher der Logik liest, in denen steht, daß die Implikation transitiv ist. Die Gewißheit über die Zulässigkeit dieser Regel ist vielmehr Ausdruck der Gewißheit im Besitze des Vermögens gewisser Eliminations-Handlungen zu sein. Jede Anwendung der Regel $A \longrightarrow C$ kann durch Anwendung der beiden Regeln $A \longrightarrow B$, $B \longrightarrow C$ eliminiert werden [3]. Zulässigkeitsbehauptungen, die für beliebige Kalküle gelten, heißen logisch. "In dieser Weise läßt sich in der Tat die übliche Logik operativ, d.h. auf der Basis des schematischen Operierens, neu interpretieren. Mit Ausnahme der Negation erhält man genau alles nach der klassischen Lehre zurück. Für die Negation erhält man dagegen zunächst nur die intuitionistische Logik - mit dieser läßt sich

---

1 Eine Regel R heißt zulässig für ein Kalkül K, wenn nach Hinzufügen von R zu den Regeln von K nicht mehr Figuren ableitbar sind als in K allein.

2 Und nicht durch Abstraktion von den Objekten, hier: den Kalkülfiguren.

3 Vgl. P. Lorenzen (1968) S. 81 ff insbes. S. 90; ebenso P. Lorenzen (1967) S. 68 ff

aber bekanntlich die zweiwertige Logik zumindest als Fiktion rechtfertigen." [1]

Der Aspekt der Abstraktion von Handlungen kommt noch prägnanter in folgender Deutung zum Ausdruck. Jede Regel eines Kalküls kann als kodifiziertes Operations- bzw. Handlungsschema aufgefaßt werden. Durch einen Prozeß der abstraction réfléchissante, bezogen auf die zu den Regeln $A \longrightarrow B$, $B \longrightarrow C$, $A \longrightarrow C$ gehörigen Handlungsschemata, wird ein neues Metahandlungsschema gewonnen, das die Ersetzbarkeit der beiden Regeln $A \longrightarrow B$, $B \longrightarrow C$ durch $A \longrightarrow C$ beinhaltet und in der Metaregel $A \longrightarrow B$, $B \longrightarrow C \Longrightarrow A \longrightarrow C$ kodifiziert ist.

Im Hinblick auf Piagets Ausführungen zur Problematik von Widerspruchsfreiheitsbeweisen und zum Begründungsproblem der Logik ist die Lorenzensche Lösung in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert. Der gemeinsame Ansatzpunkt für die operative Begründung von Logik, Arithmetik und anderer Teile der sogenannten konkreten Mathematik sind regelhafte und somit koordinierte Handlungen. Die operative Deutung logischer bzw. arithmetischer Axiome erfolgt durch einen Prozeß der reflektiven Abstraktion von Handlungen in beliebigen bzw. in speziellen ("arithmetischen") Kalkülen. Damit wird aber offensichtlich die von Piaget postulierte Hierarchie der Theorien bei der Bewältigung des Begründungsproblems der Logik durchbrochen. Andererseits besteht eine merkwürdige Parallelität in dem durch Piaget beschriebenen Mechanismus der Ontogenese logischer (und mathematischer) Strukturen und Lorenzens operativer Begründung von Logik und Arithmetik.

---

1 P. Lorenzen (1968) S. 91; 'Fiktion' hat bei Lorenzen einen wohlbestimmten Sinn, vgl. P. Lorenzen (1969).

2. Kapitel

Der syntaktische Folgerungsbegriff und seine Präfiguration

Einleitung und Übersicht

Im 1. Kapitel (vgl. S.20) wurden die Vorstellungen von Allendorfer zur Genese mathematischer Theorien aus inhaltlich mathematischen Aktivitäten referiert. Stellen wir uns nun auf den Standpunkt, auf dem bereits eine Axiomatisierung der betreffenden Theorie vorliegt. Dann ist es von besonderer Bedeutung, die Widerspruchsfreiheit der Ausdrucksmenge, die uns als Axiomensystem dieser Theorie begegnet, festzustellen. Grundsätzlich bieten sich hierzu zwei Wege an. Der eine legt den im Modellbegriff verkörperten Begriff der semantischen Widerspruchsfreiheit zugrunde, der sich jedoch nicht immer, wie die naive Mengenlehre mit ihren Antinomien zeigt, bewährt bzw. bei Theorien mit nur unendlichen Modellen problematisch wird[1]. Der zweite Weg setzt bei der syntaktischen Widerspruchsfreiheit an und erfordert die Kodifizierung (Kalkülisierung) der axiomatischen Theorie. Der Beweis der Widerspruchsfreiheit einer Theorie ist auch aus praktischen Gründen von Interesse. Semantisch gesehen deshalb, weil ein widerspruchsvolles Axiomensystem kein Modell hat und deshalb "nichts Existierendes beschreibt". Syntaktisch gesehen deshalb, weil in einem widerspruchsvollen Axiomensystem jeder Ausdruck des Systems (z.B. a und a) ableitbar ist und es daher keinen Sinn hat, sich noch um Beweise der Theorie zu kümmern[2].

Zur Darstellung einer axiomatischen Theorie als Kodifikat (Kalkül) gehören zwei Hauptteile, das Begriffsnetz und das Deduktionsgerüst. Das Begriffsnetz ist bestimmt durch die Angabe der Zeichen (Grundzeichen) und Bildungsregeln und legt somit die Kalkülsprache fest. Die Bildungsregeln sind Vorschriften zur Konstruktion ausgezeichneter Zeichenreihen (sog. einschlägige Ausdrücke) aus den Grundzeichen sowie zur Konstruktion einschlägiger Aussagengebilden (als spezielle

---

1 Unproblematisch ist die semantische Widerspruchsfreiheit bei Theorien mit endlichen Modellen. Der Aufweis eines endlichen Modells wird allgemein als hinreichender Widerspruchsfreiheitsbeweis anerkannt.

2 Vgl. H. Markwald (1972)$_1$ S. 94 ff

einschlägige Ausdrücke) [1]. Das Deduktionsgerüst wird konstituiert durch die Auszeichnung von Axiomen unter den einschlägigen Aussagengebilden sowie durch die Angabe der Deduktionsregeln (Ableitungs- Schluß - oder Beweisregeln).

Durch Anwenden der Deduktionsregeln auf Axiome bzw. auf bereits durch Anwenden dieser Regeln auf Axiome entstandene Ausdrücke erhält man eine Folge von einschlägigen Aussagengebilden (Sätze). Sind $\alpha_1 \ldots, \alpha_n, \alpha$ die der Reihe nach entstandenen Ausdrücke, so sagt man, α sei im betreffenden Kalkül ableitbar und schreibt $\vdash \alpha$; α nennt man syntaktische Folgerung und bezeichnet die Folge $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha$ als syntaktischen Beweis von α. Da bei einem Kodifikat auch die verwendete Logik in kalkülisierter Form vorliegt, kommt es beim Beweis von α offensichtlich nur auf das schematische (regelhafte) Operieren mit Zeichen gemäß den Deduktionsregeln an; die möglichen inhaltlichen Interpretationen der einschlägigen Aussagengebilde spielen für den Beweis eine nebengeordnete Rolle. Deduktionsregeln können somit als Transformationsregeln zur Erzeugung bzw. Umformung von Zeichenreihen gedeutet werden. Beispiele für Kodifikate: Aussagen- bzw. Prädikatenkalkül, der Kalkül der klassischen Arithmetik.

Im Problem der Widerspruchsfreiheit kalkülisierter axiomatischer Theorien betrachtet man die Relation der syntaktischen Folgerung gewissermaßen unter globalem Aspekt: kann jeder Ausdruck der Theorie abgeleitet werden? Diesem globalen Gesichtspunkt der Ableitbarkeitsrelation kommt in der mathematischen Praxis und im Unterricht - wenn überhaupt - geringe Bedeutung zu. Dagegen ist der lokale Aspekt der syntaktischen Folgerung - die regelhafte Umformung von Zeichenreihen - für die gesamte Mathematik fundamental.

Beispiel. Für ein festes Element g der Gruppe $(G, \cdot)$ soll gezeigt werden, daß die Abbildung $\varphi_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$ ein Homomorphismus von G ist.

Unter Anwendung der definierenden Eigenschaften für einen Homomorphismus ist $\varphi_g(xy) = \varphi_g(x) \cdot \varphi_g(y)$ zu beweisen. Die syntaktische Operation der Substitution führt auf $\varphi_g(xy) = g(xy)g^{-1} = gxeyg^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \varphi_g(x) \cdot \varphi_g(y)$.

Im ersten Schritt wurde substituiert. Den zweiten und dritten

---

1 Zur Terminologie vgl. die Ausführungen im Lexikon der Mathematik 1 (1964) S. 203 f, Frankfurt.

Schritt gewinnt man durch Anwendung der Gruppenaxiome; der letzte Schritt ergibt sich durch "Resubstitution". Bei dieser Rechnung werden die Gruppenaxiome im Sinne von Transformationsregeln für Zeichenreihen angewendet, ohne daß dazu ein Kodifikat der Gruppentheorie expliziert sein müßte. Die Zeichenreihe $(gxg^{-1})(gyg^{-1})$ kann als syntaktische Folgerung der Zeichenreihe $g(xy)g^{-1}$ gedeutet werden.

Da es sich bei der syntaktischen Folgerung um eine fundamentale mathematische Methode handelt, muß sich der Mathematikunterricht gemäß dem didaktischen Prinzip der Strukturorientierung [1] die Vermittlung dieser grundlegenden Idee angelegen sein lassen. Die Bedenken, mit dieser Forderung eine noch stärkere Stoffüberlastung des Unterrichts zu bewirken, können sofort zerstreut werden, da der traditionelle Stoffkanon bereits genügend Inhalte anbietet, die zur Thematisierung syntaktischer Umformungen geeignet sind. Man denke an Term- bzw. Gleichungsumformungen, den Kalkül der Trigonometrie, den Kalkül der Differential- und Integralrechnung, an Zahl- bzw. Polynomdivisionen etc. Die didaktische Aufgabe besteht bei diesen Bereichen im wesentlichen darin, den Begriff der syntaktischen Folgerung deutlich herauszuarbeiten.

Die Behandlung grundlegender Begriffe und Methoden der Mathematik soll nicht erst dann aufgenommen werden, wenn eine endgültig-abschließende Bearbeitung möglich erscheint, sondern ist im Sinne des Brunerschen Spiralprinzips bereits auf früheren Stufen in einfacherer Form einzuleiten. Somit ergibt sich das didaktische Problem, Möglichkeiten für die Präfiguration des syntaktischen Folgerungsbegriffs, d.h. die Erschließung dieses Begriffs unter Betonung der enaktiven und ikonischen Repräsentationsmodi, zu entwickeln.

Vor dem fachwissenschaftlichen Hintergrund protologischer Kalküle werden im zentralen Teil des vorliegenden Kapitels Vorschläge zur Präfiguration der syntaktischen Folgerung angegeben. Unmittelbar mit der syntaktischen Folgerung verbunden ist der syntaktische Beweis, der damit bereits im Primarbereich angebahnt werden kann. Eine Untersuchung des Stellenwertes von Beweisen im traditionellen bzw. neuen Algebraunterricht wirft Licht auf seine nebengeordnete

---

1 Dieses Unterrichtsprinzip geht auf die Konzeption J. Bruners zurück; vgl. E. Wittmann $(1972)_2$ S. 91 f

Rolle. Betrachtet man Term- und Gleichungsumformungen unter dem Aspekt der syntaktischen Folgerung, so ergibt sich die Fortsetzbarkeit des syntaktischen Beweisbegriffs in den Algebraunterricht. In einer Reflexion über die bei syntaktischen Umformungen durchzuführenden Handlungen wird der psychogenetische Hintergrund sogenannter syntaktischen Operationen beleuchtet. Von hier aus ergibt sich eine Verbindung zum 4. Abschnitt des 1. Kapitels.

1. Die Rolle von Beweisen im Algebraunterricht

Während dem elementaren Rechnen die Anschaulichkeits- und Objektnähe eigentümlich ist, erkennt man die Algebra an formal-symbolischen Methoden. Anschließend wird gezeigt, daß die Möglichkeit, diese Methoden für die systematische Herausarbeitung syntaktischer Operationen und eines syntaktischen Beweisbegriffs fruchtbar zu machen, weder im Algebraunterricht der traditionellen Mathematik noch in der Konzeption der neuen Mathematik genutzt worden ist.

a) Traditionelle Mathematik

Eines der didaktischen Hauptprobleme des Algebraunterrichts ist sprachlicher Natur. Der Schüler soll die Formelsprache der Algebra erlernen, damit er algebraische Formeln übersehen und darstellen und algebraische Ausdrücke unter syntaktischen Gesichtspunkten systematisch strukturieren kann [1]. Der traditionelle Ansatz der Algebra hat hinter diesen Fertigkeiten primär Kulturtechnik bzw. nützliche Hilfsmittel für die mathematischen Inhalte der Oberstufe gesehen. Wie H. Lenné in seiner "Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland" ausführt, wurden im traditionellen Mathematikunterricht algebraische Strukturen "fast nur in Fortsetzung des Zahlenrechnens in aufgabendidaktischer Weise behandelt: als Technik, mit Buchstaben, Termen und Gleichungen zu rechnen (..."Buchstabenrechnung")". [2] Hinsichtlich des Erwerbs dieser Fertigkeiten vertraute man fast ausschließlich dem Zufall, in der Hoffnung, daß der Schüler nach kürzerer oder längerer Zeit des Ringens mit dem Stoff die Sprache der Algebra meisterte [3].

Was den Gebrauch syntaktischer Zeichen angeht, so wurde (und wird) in der Gymnasialunterstufe z.B. Klammer und Gleichheitszeichen "lediglich als Abkürzung gewisser Rechenschemata internalisiert, nicht jedoch als die entscheidenden Mittel der Substitution ..." [4] (als einer typisch syntaktischen Operation). - Was nach Lenné neben

---

1 Vgl. H. Freudenthal (1973) S. 27o ff

2 H. Lenné (1969) S. 256

3 Vgl. H. Freudenthal (1973) S. 271; ebd.:"Viele Lehrer haben mir den Lernprozeß zur Sprache der algebraischen Formeln als etwas Mysteriöses geschildert."

4 H. Lenné (1969) S. 22

Mangel an Einsicht auch zu erheblichen Schwierigkeiten in der mathematischen Arbeit der nachfolgenden Schuljahre führen kann.
Das klassische Kennzeichen des Einsetzens der algebraischen Methode - so Freudenthal - war das Buchstabenrechnen. In einer fast selbstverständlich erscheinenden Art wurden in der Mittelstufe Buchstaben zur Darstellung bestimmter reeller Zahlen eingeführt. Die Problematik, die in der traditionellen Mathematik mit den Begriffen "Unbestimmte", "Unbekannte", "allgemeine Zahl", "abhängige" bzw. "unabhängige Veränderliche" verbunden ist, soll hier nicht erneut angegriffen werden [1]. Die häufig geübte Fixierung von Buchstaben auf Eigennamen (von Zahlen, oder in der autonymen Bezeichnung von sich selbst) verbaut die Möglichkeit, Rechenverknüpfungen als syntaktische Prozesse zu erfassen. Eng verbunden mit dem nebulösen Status und den Funktionen von Buchstaben in der Algebra ist die unzureichende Vermittlung des Termbegriffs. Wie Freudenthal bemerkt, wird bei der Substitution von Termen hauptsächlich das Ersetzen von Buchstaben durch Zahlen geübt, nicht dagegen die systematische Ersetzung von Termen durch komplexe Terme [2].
Hinsichtlich der Beziehung zwischen den Techniken der symbolischen Algebra und der Lösung von Sachproblemen, allgemeiner: den Anwendungen, bietet die traditionelle Mathematik ein düsteres Bild. Wie Lenné darlegt, ist das bestimmende Stofforganisationsprinzip der traditionellen Mathematik die Gliederung nach Aufgabentypen. Jeder Einzelstoff, etwa "Buchstabenrechnung" ist durch einen Aufgabentypus bestimmt, der systematisch von einfacheren zu komplexen Formen hin "durchgenommen" wird. Hauptfunktion der sogenannten eingekleideten Aufgaben (Anwendungsaufgaben) ist es, Übungsmaterial für jeweils vorher eingeführte formale Operationen abzugeben. Hier scheint auch der Grund für die Weltfremdheit dieses Aufgabentyps zu liegen. Der in der Mathematik grundlegende Gesichtspunkt der formalen Darstellung von Sachproblemen, die lineare syntaktische Beschreibung komplexer semantischer Situationen in mathematischen Modellen, ist der traditionellen Mathematik weitgehend fremd. Dadurch, daß Sachaufgaben oder eingekleidete Aufgaben nicht so sehr auf einen allgemeinen Typus hin, sondern jeweils als individuelle Aufgaben gelöst werden,

---

1 Vgl. die a.a.O. S. 255 angegebenen Literaturhinweise, sowie H. Freudenthal (1973) S. 256 ff

2 Vgl. H. Lenné (1969) S. 24

verschleiert sie den in der symbolischen Algebra motivationskräftigen Aspekt der Ökonomie, der an die Deutung z.B. einer algebraischen Gleichung mit Formvariablen als syntaktisches Schema einer ganzen Problemklasse geknüpft ist.

Die bisherigen Überlegungen haben gezeigt, daß im traditionellen Algebraunterricht das Gebiet der algebraischen Syntax weitgehend brach gelegen ist. Für den Beweis ergibt sich eine ähnliche Situation. Der Beweis spielt in der Algebra eine nebengeordnete Rolle. Die Stellung des Beweises im Algebraunterricht kommt deutlich in der folgenden Charakterisierung von Exner zum Ausdruck: "The school mathematics sequence and early college courses do not prepare a student very well in the matter of proving things. For many it is still the case that geometry is where you prove things and algebra is where you find answers to problems .... Part of the difficulty is that students do not approach the axioms of algebra as they do the axioms of geometry. Most students do not regard solving an equation as proving something in the sense that they proved things in geometry. What develops is a set of procedures for getting from one equation to another, with the relation between the first and second equations a sort of vague implication rather than equivalence." [1]

Lenné schreibt über den Beweis im Mathematikunterricht: "... die traditionelle Mathematik (hat) gewisse logische Formen, insbesondere Beweisformen, ausdrücklich als unterrichtswichtig betont. Eine Art Beweislehre hat sich jedoch nur in der Geometrie - als letzten Rest des Unterrichts nach Euklid - bewahrt." [2] Es ist ganz bezeichnend, daß z.B. bei Lietzmann das Thema "Beweis" ausschließlich mit dem Stoffgebiet Geometrie abgehandelt wird.

Natürlich kennt auch der traditionelle Algebraunterricht Beweise. Sie stehen freilich in unmittelbarem Bezug zu klassischen Problemen, wie der Irrationalität von $\sqrt{2}$, der geometrischen Begründung binomischer Formeln bzw. der Lösungsformel für die quadratische Gleichung etc. Diese Themen sind offensichtlich stark geprägt von Problemen der griechischen geometrischen Algebra.

---

1 R. M. Exner (1971) S. 395

2 H. Lenné (1969) S. 23o, ebd. S. 225

b) Neue Mathematik

Im Zuge einer sprachreinigenden Tendenz der neuen Mathematik gegen die "Unsauberkeit" der traditionellen Mathematik wurden grundlegende Begriffe wie: Variable, Term, Gleichung etc. präzisiert. Über den Prozeß der Formalisierung wird schließlich die syntaktische Dimension der Sprache der Algebra stärker betont. H. Freudenthal hat allerdings auf die tiefe Kluft zwischen der im Unterricht verwendeten mengentheoretischen Symbolik (z.B. Mengen von Buchstaben, Bezeichnung von Punkten eines Venndiagramms durch Buchstaben etc.) und der Funktion von Buchstaben und anderem linguistischen Material in der Algebra verwiesen [1].

Die Möglichkeit, syntaktische Strukturen der Algebra nicht nur unter formalen Aspekten, etwa der präzisen (wenn auch manchmal umständlichen) Formulierung von Sachverhalten zu nutzen, sondern auch unter inhaltlichen Gesichtspunkten etwa der Kalkülisierung bzw. Algorithmierung ("Wortprobleme") wie sie etwa in der Informatik von Bedeutung sind, bleibt weitgehend ungenutzt. Dies mag daran liegen, daß Kalkülisierung allzuoft mit der negativen Bedeutung von Schematismus gleichgesetzt wird.

Die neue Mathematik will den universellen Charakter der Algebra als einer Grundstruktur herausstellen und verfolgt das Ziel "alle Stoffe, die - wie zum Beispiel die Grundrechenarten oder die Bruchrechnung - algebraische Strukturen repräsentieren, ... als Modelle dieser Strukturen bewußt zu machen ... An diesen Repräsentationen müssen die Strukturen selbst sehr bald bis hin zu einer axiomatischen Formulierung entwickelt werden." [2] In den seltensten Fällen werden freilich die betreffenden Strukturen selbst Untersuchungsobjekt, was daran erkenntlich ist, daß kaum Sätze <u>über</u> Gruppen, Ringe, Körper bewiesen werden.

Um es mit einem Wort von Freudenthal zu sagen: man betreibt algebraische Strukturtheorie auf nullter Stufe. Dennoch ist durch diese Thematik im Algebraunterricht ein neuer Raum für das Beweisen erschlossen worden. Weitere Ansatzpunkte für die Entwicklung des Beweisgedankens liefert die semantisch begründete Gleichungslehre,

---

1 Vgl. H. Freudenthal (1973) S. 256 ff

2 H. Lenné (1969) S. 256

deren wesentliche Aspekte zuweilen jedoch von einem übertriebenen Formalismus überdeckt sind [1].

Eine, gegenüber dem traditionellen Algebraunterricht zu begrüßende Aufgabenform ist die des "Beweise oder widerlege ...". Fragwürdig werden diese Ansätze jedoch dann, wenn sie unvermittelt auftreten, d.h. wenn die zur Lösung erforderlichen Beweistechniken (Widerlegung von Allaussagen, Beweis von Allaussagen, Substitution, indirekter Beweis, Vollständige Induktion) nicht sorgfältig genug vorbereitet sind.

Ein Charakteristikum der neuen Mathematik ist das planmäßige schrittweise Vordringen zur symbolischen Darstellungsform über enaktive und ikonische Repräsentationsmodi. Die vorstehenden Überlegungen haben gezeigt, daß die neue Mathematik dem Beweis im Algebraunterricht mehr Platz gibt, sie muß sich daher auch seine Anbahnung in der anaktiven bzw. ikonischen Darstellungsform angelegen sein lassen.

Im Hinblick auf den syntaktischen Folgerungsbegriff und seine Präfiguration, der eine fruchtbare Verbindung zwischen Beweis und syntaktischer Struktur bringt, kann gesagt werden, daß in bisherigen Konzeptionen der neuen Mathematik noch nicht alle modernen didaktischen Mittel in Bezug auf Beweisen ausgenützt sind.

---

1 Es besteht ferner die Gefahr, daß über dem Begrifflichen das kalkülmäßige Operieren mit Gleichungen zu kurz kommt.

2. Grundbegriffe der syntaktischen Folgerung

Den weiteren Untersuchungen dieses Kapitels liegen spezielle Kodifikate, sogenannte protologische Kalküle zugrunde,wie sie P. Lorenzen in seiner operativen Begründung der Logik und Mathematik verwendet. Da es uns in erster Linie auf die Herausarbeitung des syntaktischen Folgerungsbegriffes ankommt, werden zunächst etwa mögliche Verbindungen zu inhaltlich angegebenen Gebieten (z.B. Arithmetik) ausgeschaltet.
Zu Beginn dieses Abschnitts soll an Hand der historischen Entwicklung die Bedeutung von Algorithmen und Kalkülen für die Mathematik skizziert werden [1]. Damit wird gleichzeitig die im 2. Kapitel durchgeführte Untersuchung in allgemeinere mathematische Zusammenhänge eingebettet, was u.a. im Hinblick auf die didaktischen Prinzipien der Strukturorientierung und Fortsetzbarkeit von Bedeutung ist. Sodann werden die in P. Lorenzen (1969) verwendeten Begriffe, soweit sie für den weiteren Gang der Untersuchung wichtig sind, zusammengestellt.

Informell versteht man in der Mathematik unter einem Algorithmus im Hinblick auf eine Klasse von Fragestellungen ein allgemeines Verfahren, mit dessen Hilfe zu irgendeinem vorgelegten Problem dieser Klasse mechanisch, schematisch, "ohne Aufwendung von Geist" eine Lösung gefunden werden kann, falls eine solche existiert. Aus denkökonomischer Sicht ist das Interesse an Algorithmen groß, denn sie ermöglichen wenigstens prinzipiell die Trivialisierung eines Teilgebietes der Mathematik.
Angeregt durch die großen Erfolge, welche u.a. die Araber bei der Entwicklung algorithmischer Methoden in der Algebra erzielten, kristallisierte sich im 13. Jahrhundert der Wunsch heraus, alle wahren Aussagen der Mathematik bzw. Philosophie in einer Ars magna schematisch zu erzeugen. Die Hoffnung, alle Fragen der genannten Problemkreise einer algorithmischen Lösung zuzuführen, kommt deutlich in den Worten von Leibniz zum Ausdruck:

---

1 Hier folgen wir den Ausführungen von H.-D. Ebbinghaus in: Selecta Mathematica II, Hrsg. Konrad Jacobs

" ... In Philosophia habe ich ein mittel funden, dasjenige was Cartesius und andere per Algebram et Analysis in Arithmetica et Geometria getan, in allen scientien zuwege zu bringen per Artem Combinatoriam, welche Lullius und P. Kircher zwar excolirt, bey weiten aber in solche deren intima nicht gesehen. Dadurch alle Notiones Compositae der ganzen welt in wenig simplices als deren Alphabet reduciret, und aus solches alphabets combination wiederumb alle dinge, samt ihren theorematibus, und was nur von ihnen zu inventiren müglich, ordinata methodo, mit der zeit zu finden, ein weg gebahnet wird. Welche invention, dafern sie wils Gott zu werck gerichtet, als mater aller inventionen von mir vor das importanteste gehalten wird ..."

Bei Leibniz, der während seines Schaffens immer wieder das Problem der Algorithmierung aufgenommen hat, findet man wohl erstmalig den Gedanken, die algorithmische Lösung von Problemen automatisch arbeitenden Maschinen anzuvertrauen. Leibniz war auf diesem Gebiet allerdings kein Erfolg beschert. Weitere namhafte Vertreter der algorithmischen "Richtung" waren Descartes und Hilbert.
Während das Hilbertsche 10. Problem noch als Aufforderung zur algorithmischen Lösung einer Problemklasse gedeutet werden kann, widerlegt Gödel in der Arbeit "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme" den Glauben an die Universalität der algorithmischen Methode. Gödels Arbeit zeigt die Unlösbarkeit gewisser Probleme mit Algorithmen einer präzise definierten Klasse von Algorithmen und setzt damit insofern eine neue Forschungsrichtung in Gang als nun die Explikation des intuitiven Algorithmenbegriffs vordringliches Problem ist.
Die seit 1935 angegebenen Präzisierungen des Algorithmenbegriffs haben sich sämtlich als äquivalent erwiesen. Ferner ordnen sich die präzisen Algorithmen der intuitiven Vorstellung unter, und alle bisher bekannten intuitiven Algorithmen konnten auch im präzisen Sinn simuliert werden. Aufgrund dieser Übereinstimmungen fordert die Churchsche These die Identifizierung des intuitiven mit dem präzisen Algorithmenbegriff.

Unter den Explikaten des Algorithmenbegriffs ermöglicht das der Turing - Maschine eine exakte Erfassung der Phänomene der Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit und kommt damit wohl den Leibnizschen Vorstellungen der schematisch - regelhaften Problemlösung am nächsten. Da Turing - Maschinen auf Rechenmaschinen simuliert werden können, ergibt sich eine enge Verbindung zwischen theoretischer Maschinenwelt und technischer Datenverarbeitung.

Das o.g. Leibnizzitat spricht ferner intuitiv den Begriff der Aufzählbarkeit an, der eng mit dem Berechenbarkeitsbegriff zusammenhängt. Will man dem intuitiven Sachverhalt der Aufzählbarkeit, der auch nicht eindeutig operierende Aufzählungsverfahren umfaßt, bei einer Präzisierung möglichst nahe kommen, so ist der Weg über eindeutig und schrittweise operierende Algorithmen (bzw. über berechenbare Funktionen) nicht geeignet. Einen brauchbaren Ansatz liefern Kalküle, die im Unterschied zu Algorithmen in nicht notwendig eindeutiger Weise die Elemente einer Menge zu gewinnen gestatten. Da bei Kalkülen, wie D. Ebbinghaus schreibt, intuitiv nicht der Aspekt des Aufzählens, sondern eher der Aspekt des Erzeugens (als konstruktives Moment) im Vordergrund steht, spricht man nach Post von erzeugbaren Mengen[1].

Aufzählbarkeitsfragen, die in Verbindung mit Kalkülen (bzw. Semi-Thue-Systemen) stehen, spielen eine bedeutende Rolle in der Theorie der formalen Sprachen sowie bei generativen Grammatiken der mathematischen Linguistik[2].

Den weiteren didaktischen Erörterungen, insbesondere den Modellen zur Präfiguration der syntaktischen Folgerung legen wir den in Lorenzen (1969) verwendeten Kalkülbegriff zugrunde.

Lorenzen unterscheidet zwischen elementaren und überlagerten Kalkülen. Ein elementarer Kalkül K wird durch die Angabe endlich vieler Atome (Figurenelemente) und Eigenvariablen, seiner Formeln und Figuren (Aussagen) sowie endlich vieler Regeln bestimmt. Als Formeln bezeichnet man Zeichenreihen, die sich aus der Aneinanderreihung von Atomen und Eigenvariablen ergeben. In Figuren kommen hingegen nur Atome (also keine Eigenvariablen) vor.

---

1 Spezielle Kalküle sind die o.g. Smullyanschen formalen Systeme. Der Begriff Smullyan - Aufzählbarkeit und Turing - Aufzählbarkeit sind äquivalent.

2 Vgl. F.v. Kutschera, Sprachphilosophie, München 1971

Die allgemeine Form der Regeln ist $A_1, \ldots, A_n \longrightarrow A$; $A_1, \ldots, A_n, A$ sind Formeln. Die $A_1, \ldots, A_n$ nennt man Prämissen, A heißt Konklusion. Es ist zugelassen, daß die Menge der Prämissen leer ist; Regeln des Typs "$\longrightarrow A$" nennt man Anfänge. Bei der Darstellung von Kalkülen führt man die Anfänge meist gesondert auf, und läßt dann das Zeichen "$\longrightarrow$" weg.

Beispiel: Kalkül K_1

Atome : $\circ, \Delta$

Eigenvariable: a

Anfänge : $\circ\circ, \circ\Delta$

Regeln : $a\circ \longrightarrow a\circ\Delta$ (R_1)

Man sagt: Die Regel R_1 wird angewandt, wenn aus einer in K bereits erzeugten Figur $A\circ$ die Figur $A\circ\Delta$ hergestellt wird [1]. Das Zeichen "$\longrightarrow$" drückt somit in seiner pragmatischen Funktion, die seinen operativen Sinn konstituiert, einen bedingten Imperativ aus: wenn die Figur $A\circ$ hergestellt ist, erzeuge die Figur $A\circ\Delta$! In diesem Fall spricht man von einer Belegung der Variablen a durch die Figur A.

Ein Überlagerungskalkül unterscheidet sich von einem elementaren Kalkül dadurch, daß er neben Eigenvariablen noch Objektvariablen enthalten kann. Die Objektvariablen beziehen sich im Gegensatz zu den Eigenvariablen auf die ableitbaren Figuren (Objekte) eines Grundkalküls. Die Objektvariablen können mit den Eigenvariablen des Grundkalküls sämtlich oder zum Teil übereinstimmen. Beispiele für Überlagerungskalküle bieten die Kalküle der Arithmetik, deren Objekte die im sog. Strichlistenkalkül herstellbaren Figuren (natürliche "Zahlen") sind.

Wie man die Herstellung von Figuren in einem Kalkül mitteilen kann, sei an einem Beispiel erläutert.

Zunächst jedoch werde der Kalkül K_1 durch die Regel

(R_2) $a\Delta \longrightarrow a\,\Delta\circ$ zu dem Kalkül K_2 erweitert. Die Erzeugung der Figur $\circ\circ\,\Delta\circ\Delta$ beispielsweise wird dann dargestellt in der Form

---

1 "A" dient als Mitteilungszeichen für Figuren.

1.	∘ ∘	Anfangsfigur
2.	∘ ∘ △	R_1 (1)
3.	∘ ∘ △ ∘	R_2 (2)
4.	∘ ∘ △ ∘ △	R_1 (3)

Die Zeichen sind fortlaufend numeriert; rechts sind die verwendeten Regeln vermerkt und die Nummer der Zeile, auf deren Figur die Regel angewandt worden ist.

Das obige Schema heißt Ableitung - syntaktische Folgerung - der Figur ∘ ∘ △ ∘ △ aus der Figur ∘ ∘ in K_2. Die in der letzten Zeile stehende Figur heißt Endfigur (entsprechend wird Anfangsfigur definiert) der Ableitung. Jede Endfigur A einer Ableitung in einem Kalkül K heißt ableitbare Figur. Die Ableitbarkeit einer Figur A in einem Kalkül K kann behauptet werden; man schreibt dafür $\vdash_K A$ (oder wenn im Kontext der Kalkül K festgelegt ist: $\vdash A$; später verwenden wir die suggestivere Bezeichnung $Abl_K A$ bzw. Abl A). Die Behauptung $\vdash_K A$ ist beweisdefinit; $\vdash_K A$ wird bewiesen durch Angabe einer Ableitung von A in K.

Kalküle können durch Hinzufügen von Figuren (zu den Anfängen) bzw. Regeln (zu den vorhandenen Regeln) erweitert werden. (Beispiel: Der Übergang von K_1 zu K_2 war eine solche Erweiterung). Eine Erweiterung heißt zulässig, wenn durch sie die Klasse der ableitbaren Figuren nicht echt erweitert wird; wenn also jede Figur die nach der Erweiterung ableitbar ist, dies auch schon vorher war. In dieser Situation spricht man dann allgemein von zulässigen Regeln[1] und notiert das durch $\vdash_K R$ (bzw. $Zul_K R$, Zul R).

Ist eine Figur A ableitbar bzw. eine Regel R zulässig in K nach Erweiterung von K durch Regeln $R_1, \ldots, R_n$, so schreibt man $R_1, \ldots, R_n \vdash_K A$ bzw. $R_1, \ldots, R_n \vdash_K R$.

Der Begriff der relativen Zulässigkeit soll hier nicht eingeführt werden, da es nicht unser Ziel ist, Logikkalküle zu konstruieren. Im übrigen stellt dieser Begriff nur eine leichte Verallgemeinerung des Zulässigkeitsbegriffs dar[2].

In der Klasse $\bar{K}$ der Kalküle läßt sich die folgende Teilklasse auszeichnen, auf die wir uns im weiteren beschränken werden.

---

1 Beachte Regeln des Typs $\longrightarrow A$.

2 Vgl. P. Lorenzen (1969) S. 72, S. 69

Die Regeln eines jeden Kalküls in $\mathfrak{K}_i$ sollen höchstens eine Prämisse enthalten und mit jeder Regel $R : A \longrightarrow B$ eines Kalküls K aus $\mathfrak{K}_i$ sei auch die invertierte Regel $R_i : B \longrightarrow A$ in K zulässig. Die Kalküle der Klasse $\mathfrak{K}_i$ heißen invertierbare Kalküle (i - Kalküle).

Beispiele: K_1, K_2 sind i - Kalküle, ferner der "Strichlistenkalkül"

Atome : |

Eigenvariable: a

Anfänge : |

Regel : $a \longrightarrow a|$

3. Didaktische Aspekte der syntaktischen Folgerung

An Hand einiger der Algebra entnommener Beispiele zeigt der vorliegende Abschnitt zunächst die Unterrichtsrelevanz der syntaktischen Folgerung auf. Im zweiten Teil des Abschnitts werden die Handlungen des syntaktischen Folgerns - die syntaktischen Operationen - unter psychogenetischen Aspekten untersucht. Aus der Tatsache, daß syntaktische Operationen nicht isoliert auftreten sondern in Systemen organisiert sind, die den Piagetschen Gruppierungen nahestehen, lassen sich weitreichende unterrichtspraktische Konsequenzen ziehen.

a) Die syntaktische Folgerung im Mathematikunterricht

Vergleicht man die folgenden Beispiele mit der im vorhergehenden Abschnitt gegebenen Präzisierung des syntaktischen Folgerungsbegriffs, so zeigt sich, daß dieser Begriff zwar substantiell, doch in mehr informeller Weise in den Unterricht eingeht. Substantiell deshalb, weil ähnlich der im 2. Abschnitt beschriebenen Situation durch regelhaftes Operieren aus gewissen Anfangsfiguren Endfiguren erzeugt werden; informell deshalb, weil die zugrundeliegenden Kalküle in ihrer Vielschichtigkeit nicht in extenso expliziert sind.

1. Beispiel: Vereinfache den Term $7(3x - 4y) + 2(2x + 3y)$.

Diese Aufgabe läßt sich leicht als Beweisaufgabe formulieren (damit wird gleichzeitig die unscharfe ursprüngliche Problemstellung verschärft):

Beweise: $7(3x - 4y) + 2(2x + 3y) = 25x - 2y$; oder in einer anderen Version:
Beweise oder widerlege unter Verwendung des Assoziativ - Distributiv - und Kommutativgesetzes für Terme; $25x - 2y$ ist aus $7(3x - 4y) + 2(2x + 3y)$ ableitbar.

Lösung unter Angabe der wichtigsten Umformungsregeln.

1. $7(3x - 4y) + 2(2x + 3y)$	Distributivgesetz
2. $(21x - 28y) + (4x + 6y)$	Assoziativgesetz
3. $21x - 28y + 4x + 6y$	Kommutativgesetz
4. $21x + 4x + 6y - 28y$	Distributivgesetz
5. $(21 + 4)x + (6 - 28)y$	
6. $25x - 22y$	

Der Übergang zur letzten Zeile gründet auf das Vermögen, im nicht explizierten Kalkül der ganzen Zahlen rechnen zu können. Bemerkenswert sind die Übergänge von 1. zu 2. bzw. von 4. zu 5. Hier wird das Distributivgesetz gewissermaßen in reversibler Form in seinen beiden "Richtungen": $T_1 (T_2 \pm T_3)$ $T_1 T_2 \pm T_1 T_3$ bzw. $T_1 T_2 \pm T_1 T_3$ $T_1 (T_2 \pm T_3)$ angewandt (T_1, T_2, T_3 seien Terme). Ferner erkennt man, daß den Umformungsoperationen konkret handhabbare Gegenstände - Schreibfiguren - zugrunde liegen. Ähnliche Fragestellungen lassen sich an folgendem Beispiel treffen.

2. Beispiel. Löse die Gleichung $(x + 2) + 2x - 5 = 8$

1. $(x + 2) + 2x - 5 = 8$
2. $x + 2 + 2x = 13$
3. $x + 2x + 2 = 13$
4. $3x + 2 = 13$
5. $3x = 11$
6. $x = \frac{11}{3}$

Die Gleichung $x = \frac{11}{3}$ als Zeichenreihe wurde - so kann man den Lösungsprozeß beschreiben - syntaktisch durch Anwendung gewisser Umformungsregeln aus der Gleichung $(x + 2) + 2x - 5 = 8$ abgeleitet. Die Umformungsregeln können semantisch etwa über die Äquivalenz von Termen begründet werden. Man kann aber auch eine rein syntaktisch begründete Gleichungslehre entwickeln[1]. Bei der syntaktischen Betrachtungsweise werden die Lösungskalküle der Gleichungslehre hergeleitet durch Anwendung logischer Ableitungsregeln auf die der Gleichungstheorie zugrunde liegenden algebraischen Strukturgesetze. Dann aber, so H.-G. Steiner "stellt die Gleichungslehre ... nichts anderes als eine Explikation des logischen Identitätskalküls dar. Man hat dabei gewisse Festsetzungen über die zugelassenen Terme, aus denen Gleichungen aufgebaut sind, und man hat neben den Gesetzen der elementaren Logik die für die Identität charakteristischen Gesetze ..." [2].

---

1 H.-G. Steiner (1961) S. 178

2 a.a.O. S. 179

3. Beispiel. Als Diedergruppe besitzt die Kleinsche Vierergruppe die definierenden Relationen: (D) $a^2 = e$, $b^2 = e$, $(ba)^2 = e$. Zeige, daß dieses Relationensystem äquivalent ist zu dem folgenden: (E) $a^2 = e$, $b^2 = e$, $ba = ab$.
Lösung. Aus (D) folgt (E) . Wegen $a^2 = e$, $b^2 = e$ ist $(ba)(ab) = e$. Wegen $(ba)^2 = e$ ist $(ba)(ba)(ab) = ab$ und somit $ba = ab$.
Aus (E) folgt (D). Aus $ba = ab$ folgt $(ba)^2 = (ba)(ab)$. Mit $a^2 = e$, $b^2 = e$ ergibt sich $(ba)^2 = b(a^2)b = beb = b^2 = e$.

Die Ableitung einer Figur etwa von ab aus ba erfolgt durch Anwenden der für die jeweilige Gruppe charakteristischen definierenden Relationen sowie durch Anwenden von Regeln, die für jede Gruppe dieselben sind: die Gruppenaxiome.

b) Der psychogenetische Hintergrund der syntaktischen Folgerung
Wird die Ableitbarkeit einer Figur A in einem Kalkül K behauptet ($\vdash_K A$), so erfordert der Beweis von $\vdash_K A$ die Ausführung konkreter Handlungen gemäß den Kalkülregeln. Der operative Aspekt des syntaktischen Folgerungsbegriffs besteht in der nicht zu trennenden Verbindung zwischen syntaktischer Folgerung und speziellen konkreten Handlungen. Diesen operativen Aspekt macht sich die Didaktik zunutze, indem sie den syntaktischen Folgerungsbegriff auf der Grundlage konkreter, syntaktischer Handlungen zu entwickeln sucht.
Der Gedanke, die Begriffsbildung in Handlungen wurzeln zu lassen, (Präfigurationsprinzip, dynamisches Prinzip) ist eine fundamentale didaktische Konsequenz der Denkpsychologie J. Piagets. Die Grundlage des Denkens bzw. der Begriffsbildung sind jedoch nach Piaget nicht isolierte, "starre", stereotype Handlungen, sondern in charakteristischer Weise zu Handlungsschemata (operative Schemata, Operationen) koordinierte und organisierte Handlungssysteme, die sich formal durch den Begriff der Gruppierung beschreiben lassen. Im zweiten Unterabschnitt wird gezeigt, daß die mit dem syntaktischen Folgerungsbegriff in gewissen Kalkülen intrinsisch verbundenen Handlungssysteme Modelle von gruppierungsähnlichen Strukturen sind. Im ersten Unterabschnitt sind die aus dem Gruppierungsbegriff von H. Aebli, A. Fricke u.a. gezogenen didaktischen Folgerungen zusammengestellt,

welche die Grundlagen des operativen Unterrichts (operativen Lernens) sind.
Insgesamt kann dann der Schluß gezogen werden, daß der syntaktische Folgerungsbegriff in natürlicher Weise einer operativen Erarbeitung zugänglich ist, die außerdem zur Ausformung allgemeiner kognitiver Aktivitäten beitragen kann.

α) Gruppierungsstruktur und operatives Lernen

Der Satz "penser c'est opérer" [1] gibt einen der wichtigsten Gedanken der Entwicklungspsychologie Piagets wieder. An anderer Stelle beschreibt Piaget den Prozeß der "Hochstilisierung" von Handlungen zu Denkoperationen; Denken ist "une composition toujours plus riche et cohérente des opérations qui prolongent les actions en les intériorisant ..." [2].
H. Aebli gründet hierauf eine didaktische Forderung, die implizit das Präfigurationsprinzip und das dynamische Prinzip enthält: "... das Denken eines Menschen ... ist ... ein Spiel lebendiger Operationen. Denken bedeutet operieren ... Überall sind es die Operationen, welche die Begriffe definieren, und der Unterricht muß daher den Schüler dazu bringen, diese Operationen zu vollziehen, zuerst tatsächlich und dann in "verinnerlichter" oder stellvertretender Form." [3]
Piaget unterscheidet ausdrücklich (s.o.) zwischen "actions" (Handlungen) und "opérations" (Operationen); auf Einzelheiten der Untersuchungen von Aebli, Flavell u.a. über die gegenseitige Abgrenzung dieser Begriffe gehen wir im folgenden nicht ein. Dagegen soll kurz ein begrifflicher Rahmen skizziert werden, der einerseits eine für Unterrichtsprobleme praktikable Fassung des psychogenetischen Handlungs- bzw. Operationsbegriffs erlaubt, der andererseits aber weit genug gefasst ist, um auch in vergleichbaren Situationen anderer Wissenschaften, etwa der Sprachphilosophie, anwendbar zu sein.
Allen kognitiven Aktivitäten kommt nach Piagets Äquilibrationstheorie der Zug zu, nach ausgewogenen, dynamisch-stabilen Koordinationssystemen zu drängen. Piaget nennt solche in ein System integrierte

---

1 Zit. n. A. Fricke (1970) S. 30
2 Vgl. A.M. Battro, Dictionnaire d'Epistémologie Génétique
3 H. Aebli (1963) S. 87

Akte, welche maßgeblich an der begrifflichen Organisation der Umwelt beteiligt sind, Operationen. Ein wesentliches Kennzeichen von Operationen ist nach Piaget die Tatsache, daß sie niemals isoliert auftreten, sondern in Strukturen mit ganz charakteristischen Eigenschaften eingegliedert sind.

Didaktisch wichtig im Hinblick auf die Begriffsbildung ist folgende grobe Einteilung von Handlungen in äußere (effektive) und innere, verinnerlichte (geistige) Handlungen.

Zu den äußeren Handlungen gehören:[1]

a) Materielle Handlungen

z.B. das Manipulieren konkreter, handgreiflicher Objekte, die physikalische Bewegung materieller Gegenstände.

b) Materialisierte Handlungen

z.B. die Tätigkeit des Aufschreibens oder Nutzens mathematischer Symbole oder graphischer Veranschaulichungen mathematischer Objekte.

Offenbar korrespondieren materielle Handlungen dem enaktiven Repräsentationsmodus, während materielle Handlungen der ikonischen Darstellungsform entsprechen.

Die o.a. didaktische Forderung Aeblis kann nun formuliert werden als die Aufgabe, die etappenweise Ausformung geistiger Handlungen aus äußeren Handlungen zu fördern.

Die bisherige Unterscheidung von Handlungen sagt allerdings noch nichts über deren "Qualität" aus; ob es sich also etwa um kognitive Aktivitäten bzw. Operationen oder um starre, stereotype Gewohnheitshandlungen bzw. Gewohnheitsmechanismen handelt. Das grundlegende Kriterium zur Unterscheidung beider Handlungstypen wurde oben schon genannt: es ist die Integration von Handlungen in Handlungssystemen, den sog. Gruppierungen.

Ehe wir diesen Begriff hinsichtlich seiner didaktischen Implikationen untersuchen, soll der Begriff der Operation und der damit verbundene Begriff der operativen Handlung noch genauer erklärt werden.

Unter Operationen wollen wir Handlungsschemata verstehen, die Handlungen zugrunde liegen, die

a) in Handlungssystemen verknüpfbar

---

1 Bei dieser Unterscheidung folgen wir A. Dietz (1972) S. 326

b) assoziativ ausführbar und
c) reversibel, im Sinne einer Handlungsneutralisation[1]
sind.

Operationen sind unter kognitiven Aspekten, wie sich noch ergeben wird, besonders flexible Handlungsschemata. Ein Handlungsschema kann in äußeren oder verinnerlichten Handlungen aktualisiert werden. Statt von Operationen spricht man auch häufig von operativen Schemata. Oft wird auch nicht zwischen der Operation (als speziellem Handlungsschema) als etwas Potentiellem und ihrer Aktualisierung unterschieden. Während die Entwicklungspsychologie vornehmlich daran interessiert ist, die entwicklungsbedingte Ausbildung von Operationen zu verfolgen, deren charakteristische Merkmale a), b), c) gewissen Verhaltenskorrelaten seitens des Kindes entsprechen, geht die operative Didaktik gerade den umgekehrten Weg, der durch das operative Prinzip gekennzeichnet ist. Über den Grundsatz des handelnden Lernens gemäß dem Präfigurationsprinzip und dem dynamischen Prinzip hinaus, sind solche Unterrichtsmaßnahmen zu entwerfen, die auf die Bildung operativer Schemata abzielen.

Die Wichtigkeit der Erzeugung operativer Schemata ergibt sich aus den kognitiven Aktivitäten, welche den Eigenschaften a) - c) entsprechen.

ad a) Der Verknüpfbarkeit von Handlungen zu Handlungssystemen entspricht der konstruktive Aspekt kognitiver Aktivität. Zunächst im kognitiven Verhalten isoliert erscheinende Handlungen werden zueinander in Beziehung gebracht (Piaget spricht von "mettre en relation") und in ein komplexeres Handlungssystem integriert. Man kann denselben Sachverhalt auch durch den Begriff der Systematik erfassen. Durch die Verknüpfung von Handlungen können Handlungsbeziehungen systematisch erfasst und genutzt werden.

ad b) Die Eigenschaft der Assoziativität von Handlungsverknüpfungen garantiert ein bewegliches Denken, das fähig ist, auf verschiedenen Wegen zu einem gesetzten Ziel zu gelangen. Damit ist die Eigenschaft der Assoziativität unmittelbar mit divergentem Denken aufgrund der "Umwegeigenschaft" und mit konver-

---

1 Meist adjungiert man dem Handlungsschema "neutrale" Handlungen als uneigentliche Handlungen, die keine irgendwie geartete Zustandsänderung bewirken.

gentem Denken aufgrund desselben totaten Handlungsresultats verbunden.

ad c) Die Reversibilität bedeutet, daß Denk- bzw. Handlungsvollzüge nicht "eingleisig" verlaufen, sondern mit den entsprechenden Umkehrhandlungen koordinierbar sind. Im Gegensatz dazu: mechanisches, starres, einseitig orientiertes Denken.

Reversibilität und Assoziativität können als charakteristische Merkmale divergenten Denkens aufgefaßt werden. Operative Handlungen sind demnach stets mit den eben beschriebenen kognitiven Aktivitäten verknüpft.

Ein operativer Unterricht will gemäß dem operativen Prinzip Unterrichtsmaßnahmen realisieren, welche die Elaboration operativer Schemata bewirken. H. Aebli, A. Fricke u.a. haben sich intensiv um die Entwicklung von Unterrichtsmethoden bemüht, die den Aufbau operativer Schemata fördern sollen. Grundsätzlich gibt es für das Erlernen von Operationen zwei Möglichkeiten von Lernverfahren. Das eine übt Handlungen getrennt ein; der Lernprozeß zerfällt in mehr oder weniger stark isolierte Lernphasen, die Möglichkeit für die Bildung starrer empirischer Regeln oder Denkgewohnheiten ist groß.

Beispiel: Behandlung der Addition im Zwanzigerraum; Entwicklung von Additionsmechanismen ("Rechensätze"). Behandlung der Substraktion im Zwanzigerraum. Gesamtbehandlung beider Rechenoperationen.

Das andere Lernverfahren, das einem operativen Unterricht zugrunde liegt, die operative Methode, wird dagegen unmittelbar von der Struktur operativer Schemata bestimmt und ist ihr optimal angepaßt.

Über die grundlegenden Merkmale eines operativen Unterrichts kann ganz allgemein festgestellt werden, daß er im wesentlichen auf die unterrichtspraktische Realisierung der auf S.54 f genannten charakteristischen Eigenschaften (a) - c)) operativer Schemata abzielt.

Eine von Fall zu Fall anzugrenzende Unterrichtseinheit muß als Ganzes in Angriff genommen werden; ein solches Vorgehen nennt Fricke operative Gesamtbehandlung. Damit soll die Isolierung einzelner strukturell zusammengehörender Lernprozesse vermieden und die Beziehungsbildung zwischen einzelnen Handlungen und deren Integration in operatorische Systeme gefördert werden. Die operative Gesamtbehandlung soll den Schüler zu einem "Umkehrungen, Rück- und Umwege, Kontrollen und Vergleiche umfassenden Denken ... führen." [1]

---

1 A. Fricke (197o) S. 9o

Natürlich läßt sich in extremer Form, wie W. Schwirtz bemerkt, die operative Gesamtbehandlung nicht realisieren, dennoch sollte sie unter sinnvoller Beachtung des Grundsatzes von der Isolierung der Schwierigkeiten als Leitprinzip fungieren. Konkretisiert wird die operative Gesamtbehandlung durch die Phase der operativen Durcharbeitung [1] mathematischer Begriffe. Nach dem denkpsychologischen Grundsatz "penser c'est opérer" (vgl. S.53) genügt es nicht, dem Schüler fertig aufbereitete Begriffe, Formeln und Verfahren - bildlich gesprochen - zu "servieren" und seiner sinnlichen Wahrnehmung zu überlassen, vielmehr soll der Schüler selbst konstruktiv tätig werden und von zunächst effektiv ausgeführten äußeren Handlungen zu verinnerlichtem, vorstellendem Operieren vordringen. Eine wichtige didaktische Funktion erfüllt in diesem Zusammenhang die genetische (operative) Begriffsbildung.

Eine weitere Prägung erhält ein operativer Unterricht durch operative Übungen, die an Stelle der auf Einschleifen unbeweglicher Mechanismen bedachten herkömmlichen Übungen treten. Zu den Methoden, welche die Ausbildung starrer Denkgewohnheiten verhindern können, gehören äußere Handlungen, die sowohl die direkten als auch die inversen Handlungen einschließen. Damit soll die Reversibilität der später verinnerlichten Handlungen vorbereitet werden. Um die Reversibilität der Operationen im schulischen kognitiven Verhalten zum Tragen zu bringen, schlägt Aebli die didaktisch bewußte Verknüpfung direkter und inverser Operationen vor [2]. Die Assoziativität verinnerlichter Handlungen kann durch die Realisierung des didaktischen Prinzips der Lösungsvariation (bei ein und demselben Problem) vorbereiten: ein und dieselbe Gesamthandlung soll auf verschiedene Weise aus im allgemeinen wiederum verschiedenen Teilhandlungen aufgebaut werden. Beispiele für operativen Unterricht geben H. Aebli, A. Fricke (operativer Rechenunterricht) und W. Schwirtz (operativer Geometrieunterricht) an. Daneben hat Fricke in einer seiner Untersuchungen über die methodisch-didaktischen Konsequenzen aus der Piagetschen Psychologie die Hoffnung geäußert, daß "aus der so aufgezeigten Entwicklungstendenz des Denkens ... sich wesentlich neue Impulse für die Didak-

---

1 a.a.O. S. 92

2 Vgl. G. Steiner, Mathematik als Denkerziehung, Stuttgart (1973) S. 2o3

tik und Methodik des Rechenunterrichts ebenso wie für den höheren mathematischen Unterricht ergeben" [1] dürften.

Im Hinblick auf die operative Durchdringung auch des "höheren mathematischen Unterrichts" sind die Ausführungen von W. Schwirtz im Zusammenhang seiner Untersuchung zum operativen Prinzip im Geometrieunterricht wichtig: "Es ist zu unterscheiden zwischen der Geometrie als solcher und dem Lernen und Konstruieren von geometrischen Begriffen und Sachverhalten. Geometrie als solche ist ein überzeitliches, statisches System von Begriffen und Gesetzen. Das Lernen von Geometrie im Sinne des operativen Prinzips wird dagegen ermöglicht durch zeitliche kinematische Prozesse, die in der Hauptschule anschaulich vorstellbar sein sollten und in wirklichem manuellen Tun wurzeln" [2]. Und an anderer Stelle heißt es: "Während Geometrie - allgemeiner eine bestimmte mathematische Theorie - ein in sich ruhendes, überzeitliches System von Beziehungen ist, wird das Lernen, die Einsicht in ein solches System durch zeitliche Prozesse möglich, durch Operationen im Sinne Piagets." [3]

Die bisherigen Überlegungen haben ergeben, daß die unterrichtspraktischen Maßnahmen des operativen Unterrichts in erster Linie durch die Eigenschaften der Kompositionsfähigkeit, Assoziativität und Reversibilität von Handlungen, die sich in Handlungssysteme gliedern, bestimmt werden. Diese Eigenschaften sind in dem Sinne universell, als sie unabhängig von den "Bedeutungen" bzw. "Inhalten" der Operationen sind; das unterstreicht andererseits die Bedeutung operativer Schemata für die Entwicklung allgemeiner kognitiver Aktivitäten.

Über die Bedeutung operativer Schemata für das Lernen von Mathematik läßt sich folgendes sagen. Soll ein mathematischer Inhalt operativ erschlossen werden, so ist zu fragen, ob die mit diesem Inhalt verbundenen relevanten mathematischen Operationen operative Schemata (im Sinne Piagets) sind. Operative Schemata können, wie die weiteren

---

1 A. Fricke (1970) S. 18

2 W. Schwirtz (1969) S. 404. In diesen Worten kommt deutlich eine platonistische Auffassung vom ontologischen Status der Mathematik zum Ausdruck.

3 a.a.O.

Ausführungen ergeben, strukturell durch den Begriff der Gruppierung beschrieben werden [1]. Didaktisch wichtig ist dabei, daß der Gruppierungsbegriff den Aufbau von komplexen Operationen aus sog. elementaren Operationen zu modellieren sucht. Um festzustellen, ob gewisse mathematische Operationen operative Schemata sind, müssen diese Operationen als Modelle der abstrakten Gruppierungsstruktur nachgewiesen werden. Dieser Nachweis erbringt die Möglichkeit der operativen Behandlung des betr. mathematischen Inhalts.

Wir kommen nun zur formalen Beschreibung des Begriffs "Gruppierung". Nach Wittmann ist eine Gruppierung ein Quintupel $(M, M\times M, \Delta, \circ, \trianglelefteq)$ mit folgenden Daten und Eigenschaften:

M ist eine nichtleere Menge, deren Elemente Zustände heißen mögen.

Auf $M\times M$ wird durch die Festsetzung

$$(\alpha,\beta)\circ(\beta,\gamma) = (\alpha,\gamma) \qquad \text{für alle } \alpha,\beta,\gamma \in M$$

in kanonischer Weise die teilweise Verknüpfung $\circ$ definiert. Die Elemente von $M\times M$ werden als Operationen bezeichnet. Δ sei eine Teilmenge von $M\times M$ (Elementaroperationen).

Die zweistellige Relation "$\trianglelefteq$" auf M wird folgendermaßen definiert:

1. $M\times M$ wird bzgl. $\circ$ von Δ und der Menge $\Delta^{-1} = \{(\beta,\alpha) \mid (\alpha,\beta)\in\Delta\}$ erzeugt.
2. $\alpha \trianglelefteq \beta$ genau dann, wenn es Elemente $(\alpha_1,\beta_1),\dots,(\alpha_n,\beta_n)$ aus Δ gibt mit $(\alpha,\beta) = (\alpha_1,\beta_1)\circ\dots\circ(\alpha_n,\beta_n)$
3. $(M, \trianglelefteq)$ ist ein Verband

Man bezeichnet

(α,β) als Operation, welche den Zustand α in den Zustand β überführt

(β,α) als Inverse Operationen zu (α,β)

$\circ$ als Hintereinanderausführung von Operationen

Elemente der Form (α,α) als identische Operationen

Elemente von Δ^{-1} als inverse Elementaroperationen

Ferner überzeugt man sich mühelos, daß eine Gruppierung folgende Eigenschaften hat:

G_1 Kompositionsfähigkeit der Operationen (innerhalb der durch die teilweise Verknüpfung auferlegten Beschränkungen)

---

1 E. Wittmann (1972), S. 2o3 ff hat eine für die Anwendungen brauchbare Formalisierung der Gruppierungsstruktur angegeben.

G_2 **Assoziativität der Verknüpfung**

G_3 **Reversibilität**

(α,β), $(\beta,\gamma) \in$ MxM, dann ist $(\alpha,\beta)\circ(\beta,\gamma)\circ(\gamma,\beta) = (\alpha,\beta)$

G_4 **Identische Operationen**

$(\alpha,\beta) \in$ MxM, dann ist $(\alpha,\beta)\circ(\beta,\alpha) = (\alpha,\alpha)$

$(\alpha,\beta)\circ(\beta,\beta) = (\alpha,\beta)$

G_5 **Tautologie**

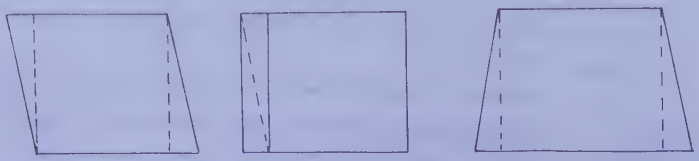
Ist $\sqcup$ die Supremumsverknüpfung im Verband (Halbverband) $(M, \trianglelefteq)$, so gilt für alle $\alpha,\beta \in M$ mit $\alpha \trianglelefteq \beta$:

$\alpha \sqcup \alpha = \alpha$ (Tautologie)

$\alpha \sqcup \beta = \beta$ (Absorption)

Bemerkung: Die algebraischen Eigenschaften G_1 - G_4 lassen sich auch gewinnen, wenn man in der Definition von "Gruppierung" die Verbandseigenschaft (3.) nicht fordert. Allerdings erzeugt $\Delta \cup \Delta^{-1}$ i.a. nur eine gewisse Teilmenge Ω von MxM (vgl. S. 61 ff), deren Elemente man nun sinngemäß als Operationen bezeichnet. Die Gültigkeit von G_1 - G_4 ist dann natürlich nur in Ω gewährleistet. -
Die teilweise Verknüpfung $\circ$ sowie das Postulat 1 sind der Niederschlag der algebraischen Struktur von Operationen. Postulat 3 spiegelt in Verbindung mit der Relation $\trianglelefteq$ ein Ordnungsprinzip wieder, das Wittmann informell mit den Worten beschreibt: "Durch Handlungen wird in die Welt Ordnung gebracht."
Nun gibt es neben den von Piaget angegebenen Modellen für Gruppierungen Handlungssysteme, die sich zwar formal dem Gruppierungsbegriff nicht streng unterordnen lassen, die ihm jedoch so nahe kommen, daß es sinnvoll ist, sie in diesem Zusammenhang zu erörtern. Es sind dies etwa Operationen mit (zunächst) als starr angenommenen Objekten - z.B. geometrischen Figuren der Ebene - die darin bestehen sie von einem Anordnungszustand in einen anderen überzuführen.

Beispiel:



Sind α,β zwei Anordnungszustände, dann sei (α,β) die Operation, die α in β überführt. Das System dieser Operationen weist zwar

hinsichtlich seiner algebraischen Struktur die Eigenschaften G_1 - G_4 auf, dennoch läßt sich keine Klasse von Elementaroperationen angeben, die in der Menge der Anordnungszustände eine Verbands- bzw. Halbverbandsstruktur definieren würde. Ersatz dafür ist, "daß die gesamte Geometrie intuitiv als Lehre von den räumlichen Ordnungen anzusehen ist, und einen derartigen (geradezu typischen) Reichtum an Ordnungsprinzipien aufweist, daß es absurd wäre, diese auf eine zweistellige Ordnungsrelation reduzieren zu wollen." [1]
Auch die im folgenden Abschnitt zu erörternden Operationssysteme weisen zwar die für operative Schemata charakteristischen und für die Didaktik wichtigen algebraischen Eigenschaften (G_1 - G_4) von Gruppierungen auf, es lassen sich auch Elementarhandlungen auszeichnen, trotzdem etabliert sich auf der Grundlage jener Operationen nur eine Ordnung im intuitiven Sinn - im Gegensatz zu "Unordnung". Operationssysteme, welche nur die Eigenschaften G_1 mit G_4 in einer evtl. verkleinerten Menge Ω von Operationen aufweisen - vgl. die Bemerkung S. 6o - und eine allgemeinere Ordnung induzieren, bezeichnen wir als Fastgruppierungen (F-Gruppierung).

β) Didaktisch relevante Modelle von Fastgruppierungen

Im folgenden werden drei wichtige Modelle für F-Gruppierungen angegeben: die F-Gruppierung der syntaktischen Folgerung in invertierbaren Kalkülen, sowie die F-Gruppierungen der Term- bzw. Gleichungsumformungen.
Die Ableitung einer Figur B in einem invertierbaren Kalkül K (nur solche werden im folgenden betrachtet) erfolgt aus einer schon abgeleiteten Figur A durch Anwendung von gewissen Kalkülregeln. Interpretiert man eine Figur als Zustand einer aus Atomen (Figurenelementen) zusammengesetzten Zeichenreihe, so kann die Ableitung von B aus A auch als diejenige Handlung gedeutet werden, die den Zustand A in den Zustand B überführt.
Jene Handlung baut sich aber aus einer Kette von Elementarhandlungen

---

1 a.a.O. S. 219

auf, nämlich der jeweils einmaligen Anwendung einer Kalkülregel auf eine abgeleitete Figur.

Es sei nun M die Menge der im i-Kalkül K ableitbaren Figuren. Das Paar (A,B) mit (A,B) $\in$ MxM bezeichnet die Ableitungsoperation, die A in B überführt.
Durch (A,B) $\circ$ (B,C) = (A,C) ist in M x M eine teilweise Verknüpfung erklärt. Die Teilmenge Δ von M x M wird folgendermaßen definiert.
$\Delta = \{ (A,B) \mid$ B geht aus A durch einmaliges Anwenden einer Regel von K hervor$\}$
Da K als invertierbar vorausgesetzt war, ist $\Delta^{-1} = \Delta$
Für beliebige i-Kalküle kann man natürlich nicht erwarten, daß M x M als Ganzes von Δ erzeugt wird.

Beispiel. Kalkül K_3

Atome : $\circ, |$

Eigenvariable: a

Anfänge : $\circ\circ, ||$

Regeln : $a\circ \longrightarrow a\circ\circ$
$a| \longrightarrow a||$

Die Menge M der Zustände hat dann die Gestalt $M = \{\circ\circ, \circ\circ\circ, \ldots, ||, |||, ||||, \ldots\}$
$\Delta = \{ (\circ\circ,\circ\circ\circ), (\circ\circ\circ,\circ\circ), (\circ\circ\circ,\circ\circ\circ\circ), \ldots, (||,|||), (|||,||), \ldots \}$
Im Erzeugnis von Δ kommen z.B. die Operationen $(\circ\circ, \circ\circ\circ\circ\circ)$, $(||||, ||)$ vor. Das Paar $(\circ\circ, |||)$ aus M x M liegt dagegen nicht im Erzeugnis von Δ .
Diesem Paar entspricht keine Ableitungsoperation.
Die Paare (A,B) mit (A,B) $\in \Omega$ [1] können als "eigentliche" Ableitungsoperationen interpretiert werden. In der Menge Ω erzeugt Δ eine Äquivalenzrelation $\sim$ [2].
Insgesamt ist das Quintupel $(M, \Omega, \Delta, \circ, \sim)$ eine Fastgruppierung im Sinne der im Abschnitt α) (S.61) gegebenen Erklärung.

---

1 Ω ist das Erzeugnis von $\Delta \cup \Delta^{-1}$

2 Ist B aus A ableitbar, so auch A aus B. In diesem Fall ist dann $A \sim B$.

b) Die F-Gruppierung der Termumformungen

Terme sind Zeichenreihen und der Begriff Term wird in den folgenden Termaufbauregeln $\mathfrak{T}$ induktiv erklärt:

1) Alle Zahlzeichen sind Terme

2) Alle Variablen sind Terme

3) Sind T_1 , T_2 Terme, so sind auch $T_1 + T_2$, $T_1 - T_2$ $T_1 \cdot T_2$, $\frac{T_1}{T_2}$ Terme

4) Substituiert man für die Variablen eines Terms Terme, so ergibt sich wieder ein Term.

Unter dem Definitionsbereich $D_V(T)$ eines Terms T bezüglich einer Grundmenge V versteht man die Menge aller derjenigen Elemente von V für die T bei Substitution in ein definiertes Zahlzeichen übergeht.

Zwei Terme T_1 , T_2 heißen äquivalent ($T_1 \sim T_2$) bezüglich V , wenn $D_V(T_1) = D_V(T_2)$ und die Gleichung $T_1 = T_2$ allgemeingültig in $D_V(T_1)$ ist.

Soweit es sich bei den Körperaxiomen von $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ um allgemeingültige Gleichungen handelt, gewinnt man aus diesen die folgende Äquivalenzumformungsregel:

Terme, die durch Umformungen gemäß jenen Körperaxiomen auseinander hervorgehen, sind äquivalent bzgl. einer Grundmenge V (als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$), wenn ihre Definitionsbereiche bezüglich V übereinstimmen.

Somit ergibt sich folgendes System $\mathfrak{S}$ von Termumformungsregeln

1. $(T_1 \dot{+} T_2) \dot{+} T_3 \longleftrightarrow T_1 \dot{+} (T_2 \dot{+} T_3)$

2. $T_1 \dot{+} T_2 \longleftrightarrow T_2 \dot{+} T_1$

3. $T_1 \cdot (T_2 + T_3) \longleftrightarrow T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$

Für Bruchterme hat man zusätzlich die Regeln:

$$\frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{T_3}{T_4} \longleftrightarrow \frac{T_1 \cdot T_3}{T_2 \cdot T_4}$$

$$\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_4} \longleftrightarrow \frac{T_1 \cdot T_4 + T_2 \cdot T_3}{T_2 \cdot T_4}$$

$$\frac{T_1}{T_2} : \frac{T_3}{T_4} \longleftrightarrow \frac{T_1 \cdot T_4}{T_2 \cdot T_3}$$

$$\frac{T_1}{T_2} \longleftrightarrow \frac{T_1 \cdot T_3}{T_2 \cdot T_3}$$

Voraussetzung für diese Äquivalenzen ist natürlich, daß die vorkommenden Terme über einem gemeinsamen Definitionsbereich betrachtet werden.

Nun gibt es zwei Möglichkeiten zu F-Gruppierungen zu gelangen. Die eine besteht darin, eine Klasse M von Termen zu betrachten, die gemäß $\mathcal{T}$ konstruiert und über einer vorgegebenen Teilmenge D von V definiert sind. In der Menge $M \times M$ wird die Teilmenge Δ definiert $\Delta = \{ (T_1, T_2) \in M \times M \mid T_2$ geht aus T_1 durch einmalige Anwendung einer Regel von $\mathcal{P}$ hervor$\}$

Mit der in $M \times M$ auf kanonische Weise definierten teilweisen Verknüpfung $\circ$ induziert Δ (Bem. $\Delta = \Delta^{-1}$) in M die gerade Relation $\sim$ der Termäquivalenz.

Ähnlich wie bei den i-Kalkülen wird $M \times M$ im allgemeinen nicht als Ganzes von Δ erzeugt. Wir beschränken uns daher wieder auf das Erzeugnis Ω von Δ und nennen die Elemente von Ω eigentliche Termumformungsoperationen.

Das Quintupel $(M, \Omega, \Delta, \circ, \sim)$ ist Modell einer F-Gruppierung.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, von einem gemäß $\mathcal{T}$ konstruierten Term T mit Definitionsbereich $D_V(T)$ auszugehen und die Menge M der zu T bzgl. $D_V(T)$ äquivalenten Terme als Zustandsmenge auszuzeichnen.

Die Menge Δ wird wie im ersten Fall definiert. In der vorliegenden Situation erzeugt Δ die Menge $M \times M$ als Ganzes.

$(M, M \times M, \Delta, \circ, \sim)$ ist Modell einer F-Gruppierung [1].

Beispiel. Beweise: Der Term $25x - 2y$ ist aus dem Term $7(3x - 4y) + 2(2x + 3y)$ ableitbar (vgl. S.50).

---

1 Die teilweise Verknüpfung $\circ$ wird wie im ersten Fall erklärt, $\sim$ ist die Relation der Termäquivalenz.

1. $7(3x - 4y) + 2(2x + 3y)$

2. $(21x - 28y) + 2(2x + 3y)$

3. $(21x - 28y) + (4x + 6y)$

4. $21x - 28y + (4x + 6y)$

5. $21x - 28y + 4x + 6y$

6. $21x + 4x - 28y + 6y$

7. $21x + 4x + 6y - 28y$

8. $(21 + 4)x + 6y - 28y$

9. $(21 + 4)x + (6 - 28)y$

10. $25x + (-22)y$

11. $25x - 22y$

Die Zeilenübergänge 1./2. bzw. 7./8. zeigen deutlich die Reversibilität von Termumformungsoperationen. (hier: nach dem Distributivgesetz). Das operative Schema, das diesen Umformungshandlungen zugrunde liegt, kann folgendermaßen beschrieben werden:
Zerlegung eines Produktes in eine Summe - Zerlegung einer Summe in ein Produkt.
In dem Beispiel sind nicht sämtliche elementaren Umformungsoperationen dargestellt. So müßte z.B. beim Übergang 7./8. zunächst gemäß φ_1 geklammert werden. Anders ausgedrückt: mehrere (3) Elementaroperationen sind zu einer Operation (7./8.) verbunden worden. Je geschickter und routinierter jemand beim Lösen solcher Umformungsaufgaben ist, desto mehr Elementaroperationen wird er zu Operationen zusammenfassen.
Eine in diesem Sinne verkürzte, aber dennoch die wesentlichen Umformungsschritte wiedergebenden Ableitung wäre etwa die Schrittfolge
1 5 7 9 11.

c) Die F-Gruppierung der Gleichungsumformungen

Für das Lösen von Gleichungen gehen wir von folgendem System $\mathcal{U}$ von Umformungsregeln aus:

1. $T_1 = T_2 \longrightarrow T_1 \pm A = T_2 \pm B$

   Dabei sind T_1 , T_2 , A , B Terme in einer Variablen (konstruiert gemäß $\mathcal{T}$) und $A \sim B$ in $D_V(T_1 = T_2)$ [1]

2. $T_1 = T_2 \longrightarrow \alpha T_1 = \alpha T_2$; $\alpha \in \mathbb{Q}$

3. $T_1 = T_2 \longrightarrow T = T_1$; $T \sim T_1$ in $D_V(T_1 = T_2)$

4. $T_1 = T_2 \longrightarrow T \cdot T_1 = T \cdot T_2$; $T \sim T$ in $D_V(T_1 = T_2)$

Die Interpretation der Regeln 1., 2., 4. ist unmittelbar klar.
Die Regel 3. besagt: aus einer gegebenen Gleichung leitet man eine dazu äquivalente Gleichung ab, indem man einen Term der Gleichung durch einen bzgl. des Definitionsbereichs der Gleichung äquivalenten Term ersetzt.

Es sei M die Menge der zu einer gegebenen Gleichung α von der Form $T_1 = T_2$ (T_1 , T_2 Terme, die gemäß $\mathcal{T}$ aufgebaut sind) äquivalenten Gleichungen. Die Teilmenge Δ von M x M wird durch die Festsetzung bestimmt:
$(\alpha, \beta) \in \Delta$ genau dann, wenn die Gleichung β aus der Gleichung α durch einmalige Anwendung einer der Umformungsregeln von $\mathcal{U}$ hervorgeht. Δ erzeugt bzgl. der teilweisen Verknüpfung $\circ$ die Menge M x M als Ganzes und induziert in M die Relation $\sim$ der Äquivalenz von Gleichungen. (M, M x M, $\Delta, \circ, \sim$) ist Modell einer F-Gruppierung. Durch leichte Verallgemeinerung eines von H.-G. Steiner angegebenen Beispiels [2] kann man zu einer schwachen Gruppierung gelangen. Dazu beschränkt man sich auf Gleichungen des Typs $T = a$, wobei T ein in der Variablen linearer Term und a ein Zahlzeichen ist. Die relevanten Umformungsregeln für diesen Gleichungstyp sind 1., 2., 3.

α sei nun eine Gleichung vom Typ $T = a$; in dieser Situation werde der Term T mit T_α bezeichnet. M sei ferner die Menge der zu α äquivalenten Gleichungen; in M x M wird Δ durch folgende

---

1 $D_V(T_1 = T_2) := D_V(T_1) \cap D_V(T_2)$

2 Vgl. H.-G. Steiner (1973) S. 7 ff

Festsetzung definiert:

$(\alpha, \beta) \in \Delta :\Leftrightarrow$ i es gibt ein Zahlzeichen b, so daß der Term T_α mit dem Term $T_\beta \pm b$ übereinstimmt oder

ii es gibt ein c, so daß T_α mit $c\,T_\beta$ übereinstimmt oder

iii die Terme T_α, T_β sind äquivalent.

Δ erzeugt die Menge M x M als Ganzes. Bezüglich der von Δ in M induzierten Relation $\sim$ ist die Gleichung vom Typ $x = d$ maximales Element von M. $(M, \sim)$ ist ein aufsteigender Halbverband, das Quintupel $(M, M \times M, \Delta, \circ, \sim)$ ist Modell einer schwachen Gruppierung. Informell läßt sich das Lösen von Gleichungen als systematisches Anwenden der in $\mathcal{U}$ definierten Operationen beschreiben mit dem Ziel, die gegebene Gleichung in eine Normalform überzuführen, aus der die Lösung unmittelbar ersichtlich ist. Bei gegebener Gleichung α ist somit das Ziel der Umformungsoperationen genau fixiert. Das bedeutet aber, daß beim Lösen von Gleichungen zunächst das konvergente Denken aufgefordert ist. Andererseits gibt es für die Lösung einer Gleichung i.a. eine Vielfalt von Lösungsstrategien. Diese Vielfalt wird durch die verschiedenen möglichen Termumformungen bewirkt, wobei manche davon für den Lösungsprozeß günstig, andere zulässige dagegen weniger günstig bzw. unnütz sind. Somit ist für das Lösen von Gleichungen auch die Fähigkeit zum divergenten Denken nützlich, die sich darin zeigt, in flexibler Weise Termumformungen durchführen und überblicken zu können. Das setzt aber voraus, daß Termumformungen aufgrund ihrer F-Gruppierungsstruktur operativ gelehrt werden.

Anschließend illustrieren wir die elementaren Gleichungsumformungen an einem Beispiel (vgl. S.51). Zu lösen ist die Gleichung

$(x + 2) + 2x - 5 = 8$

$(x + 2) + 2x - 5 = 8$		
$x + 2 + 2x = 13$	i	$b = -5$
$x + 2x + 2 = 13$	iii	
$3x + 2 = 13$	iii	
$3x = 11$	i	$b = 2$
$x = \frac{11}{3}$	ii	$c = 3$

Die Gleichung $X = \frac{11}{3}$, so kann man den Lösungsprozeß beschreiben,

wurde aus der Gleichung $(x + 2) + 2x - 5 = 8$ syntaktisch (durch Anwendung der Umformungsregeln i - iii) gefolgert. Die vorgenommenen Umformungsoperationen sind ein (syntaktischer) Beweis für die Ableitbarkeit von $x = \frac{11}{3}$ aus $(x + 2) + 2x - 5 = 8$.

Zusammenfassung. Die bisherigen Ausführungen haben ergeben, daß sich die Ableitungshandlungen in i-Kalkülen sowie Term- und Gleichungsumformungen durch F-Gruppierungen beschreiben lassen. Somit sind diese syntaktischen Operationen einer operativen Behandlung im Unterricht zugänglich. Ansätze in dieser Richtung (hinsichtlich Term- und Gleichungsumformungen) sind im Band 8 der "Neuen Mathematik" (Hrsg. H. Winter, Th. Ziegler) realisiert.

4. Grundbegriffe der syntaktischen Folgerung und deren Präfiguration

a) Vorbemerkungen

Im folgenden werden vor dem Hintergrund invertierbarer Kalküle Vorschläge zur Präfiguration des syntaktischen Folgerungsbegriffs und anderer wichtiger mathematischer Begriffe (Kodierung, Homomorphie etc.) entwickelt. Das Prinzip der Präfiguration von Begriffen und symbolischen Operationen besagt, daß die präsymbolischen und präverbalen (d.h. enaktiven und ikonischen) Wurzeln von Begriffen und symbolischen Operationen breit entwickelt und als Grundlage für die Symbolisierung benützt werden [1]. Während B. Inhelder in ihren Ausführungen über die Anbahnung fundamentaler mathematischer Begriffe in der Grundschule zu erkennen gibt, daß sie die Realisierung des Präfigurationsprinzips in einem sog. Prä-Curriculum in direkte Beziehung zum geistigen Entwicklungsniveau des Kindes (1./2. Schuljahr: präoperatives bzw. konkret-operatives Stadium in Piagets Stufentheorie) setzt, handelt es sich m.E. beim Präfigurationsprinzip um ein universelles didaktisches Prinzip [2], wobei natürlich einschränkend gesagt werden muß, daß nicht jedes Lernen im Enaktiven starten und über das Ikonische ins Symbolische zu laufen hat. Nicht jeder mathematische Inhalt ist zur enaktiven bzw. ikonischen Repräsentation, allgemein: zur didaktischen Modellbildung [3], geeignet.

Nach den bisherigen Ausführungen über Kalküle und den in Kalkülen erklärten syntaktischen Folgerungsbegriff, bieten sich diese Objekte zur Präfiguration der o.g. Begriffe geradezu an, wie die Lorenzensche Fassung des Begriffs der Definitheit sprachlicher Aussagen über Kalküle zeigt [4].

Nun kann unser weiteres didaktisches Programm allgemein umrissen werden: durch geeignete Aufgaben - meist in Form eines Spieles - werden die Schüler in einer Phase der Konfrontation zu Handlungen veranlaßt, die ihrerseits Grundlage der Begriffsbildung sind.

Für das Einbringen von Spielen - Lernspielen - in den Unterricht

---

1 Vgl. E. Wittmann $(1972)_2$ S. 1o2 ff

2 Es könnte auch für einen Studenten der Topologie von Nutzen sein, wenn er Gelegenheit bekäme, die zum Beweis des Klassifikationssatzes 2-dimensionaler Mannigfaltigkeiten erforderliche Methode der Triangulation, an Modellen manuell durchzuführen.

3 Zum Begriff des didaktischen Modells vgl. H. Winter (197o) S.157 ff und H. Griesel a.a.O. S.

4 P. Lorenzen (1969) S. 5 f

sprechen mehrere Gründe: erstens können Lernspiele rein von den sachbezogenen Zielen her, die man mit ihnen verfolgt, der Präfiguration logisch-mathematischer Strukturen dienen; zweitens soll das Kind im Spiel selbst aktiv werden (dynamisches Prinzip), es soll im Umgang mit Spielmaterial Freude finden und Erfolgserlebnisse haben. Gegen die Verquickung von Lernen und Spiel gibt es aber auch ernsthafte pädagogische Einwände: "Lernen ist Arbeit, ja eine der schwersten Arbeiten überhaupt. Man sollte den Kindern nicht vorgaukeln, daß man diese unerläßliche und schwere Aufgabe spielend oder gar spielerisch erledigen könnte." [1] Vor allem der gegen das Abgleiten des Spiels zur Spielerei gerichtete Einwand muß angesichts der Flut auf dem Markt befindlicher Spiele ernst genommen werden.

Lernspiele sind im Vorfeld der Mathematik stets auf ein objektiv gesetztes Ziel gerichtet. Sie unterscheiden sich von alltäglichen Kinderspielen in der Regel durch ihre objektive Zweckhaftigkeit, durch ihre Planmäßigkeit, durch den stetigen Aufbau hinsichtlich Komplexität und kognitiver Anforderung.

Wenn V. Erath schreibt: "Gott ist ein Kind, und als er zu spielen begann, trieb er Mathematik. Sie ist die göttlichste Spielerei unter den Menschen."[2], dann heben diese Worte die unmittelbare Beziehung zwischen Spiel und mathematischer Aktivität hervor. Die dichterische Metapher von Mathematik als Spiel - und Spiel als Mathematik - läßt sich präzisieren. Als wesentliche Merkmale gehören nämlich zu einem Spiel: definierte Anfangszustände, vereinbarte Spielfiguren, vereinbarte Spielregeln, entscheidbare Spielsituationen, Bewertungen von Spielkonstellationen. Diesen Merkmalen stellt H. Winter im mathematischen Spiel gegenüber: Grundannahmen (Axiome, Anfangsfiguren), vereinbarte Definitionen, Schlußregeln, Folgerungen, Interpretationen. Der Vergleich beider Merkmalskategorien zeigt die enge Verwandtschaft zwischen Kodifikat bzw. Kalkül und Spiel. Nach Winters Auffassung ist es eine völlig falsche Sicht sowohl des Lernprozesses als auch der Mathematik, wenn man meint, mathematische Spiele in der Schule verhielten sich zur wirklichen Mathematik, wie etwa das Kriegsspiel mancher Kinder zum wirklichen Krieg.

Geht man ferner davon aus, daß intellektueller Fortschritt auf dem

---

1 H. Maier, W. Plössl in: Meschkowski (1972) S. 98

2 Cit.n. H. Meschkowski (1969) S. 233

Gebiete der Mathematik nicht alleine durch außermathematische praktische Verwertbarkeit ihrer Ergebnisse beeinflußt wird, und sich die Anwendbarkeit manch großer Ideen erst lange Zeit nach ihrer Entstehung erwiesen hat, so könnte man sagen, daß an der Geburt jener Ideen der innermathematische Spieltrieb beteiligt gewesen sei. Die Analogie zwischen mathematischer und Spiel-Aktivität rechtfertigt es, vom Spielaspekt der Mathematik zu sprechen.
Bei den im folgenden vorzuschlagenden Kalkülspielen ist eine weitgehende Verschmelzung zwischen didaktischer Funktion - der Präfiguration gewisser syntaktischer Operationen - und dem Spielaspekt abstrakter, nicht interpretierter Kalküle gegeben. Solange ein Kalkül nicht interpretiert ist, stellt er ein "sinnenleeres Zeichenspiel" dar; in der selbständigen Konstruktion von Kalkülen ohne Seitenblick auf mögliche Interpretation und praktische Nutzanwendung kann sich Kreativität im Spieltrieb in einem entspannten Feld voll entfalten. Andererseits sollen die Schüler natürlich auch die Möglichkeit der Interpretation eines abstrakten Kalküls (d.h. den Modellbegriff) erfahren. Das hat außerdem den Vorzug, daß die Korrektheit syntaktischer Operationen stets durch Rückgang in das Modell an deren Gültigkeit kontrolliert werden kann. Grundsätzlich bieten sich zwei Möglichkeiten für die Verbindung zwischen syntaktischen und semantischen Begriffen an: entweder wird ein zunächst frei konstruierter Kalkül nachträglich interpretiert oder der Kalkül wird im Zuge eines Mathematisierungs- und Formalisierungsprozesses entwickelt. Der zweite Weg kann im Rahmen der von Dienes entwickelten Lernzyklen begangen werden; diese umfassen vom Spiel bis hin zum Denken ist abstrakten Strukturen die folgenden Stufen:

1. freie und strukturierte Spiele mit verschiedenem Material gemäß dem Prinzip der Variation der Veranschaulichung
2. die Entdeckung gemeinsamer Strukturen
3. der Abstraktionsprozeß
4. die ikonisch-schematische Darstellung der Abstraktion
5. die Formalisierung (Symbolisierung)
6. Axiomatisierung und formaler Beweis

Zunächst könnte es scheinen, daß man sich mit der unmittelbaren Beschäftigung mit Kalkülen, wie es bei den folgenden Vorschlägen der Fall ist, sofort auf die sechste Stufe der Dienesschen Hierarchie

begibt und wichtige Vorstadien überspringt. Es wurde jedoch schon mehrfach betont, daß die äußeren Handlungen (vgl. S.54) in Kalkülen der enaktiven (bzw. ikonischen) Repräsentationsstufe zugehören. Die Dienessche Hierarchie ist außerdem stark semantisch geprägt - im Gegensatz zu unserer syntaktischen Akzentuierung; ferner kann m.E. das Durchlaufen gerade dieses Zyklus sicher keine notwendige Bedingung für Lernen darstellen.

b) Kalkülspiele mit linearen Figurenkonfigurationen

Im Mittelpunkt des folgenden schulpraktisch orientierten Teils stehen protologische Spiele, d.h. Beweisspiele, in denen es hauptsächlich um die Ableitbarkeit von Figuren bzw. die Zulässigkeit von Regeln in Kalkülen geht. In einem vorgelagerten propädeutischen Abschnitt werden zunächst der Typus der herzustellenden Figuren, die Methode der Figurenkonstruktion, deren schematische Darstellung sowie operative Methoden zum Vergleich von Figuren entwickelt.

Als Arbeitsmaterial in der enaktiven Phase dienen leicht herstellbare Plättchen verschiedener Formen (quadratisch, dreieckig, rund). In der ikonischen Darstellungsform treten an die Stelle manipulierbaren Materials graphische Zeichen, die entweder die Gestalt der Plättchen schematisieren oder andere konventionelle Formen haben.

Die zu behandelnden syntaktischen Operationen werden durch praktische Probleme der Figurenherstellung für Muster, Bordüren etwa in einer Druckerei motiviert. Allerdings sieht man sich dann einer ähnlichen Situation wie bei manch anderen didaktischen Modellen konfrontiert: in weiten Bereichen besteht eine akzeptable Übereinstimmung zwischen der Semantik des Modells und der zu veranschaulichenden Theorie, während in anderen Bereichen die Modellierung zum Teil künstlich wirkt [1].

Die folgenden schulpraktischen Vorschläge stellen keinen im Unterricht unmittelbar einsetzbaren Kurs dar, sondern dienen eher der Problembeschreibung. Ein Problem, das im Rahmen dieser Untersuchung nicht in Angriff genommen wurde und m.E. auch nur im Rahmen intensiver Unterrichtsversuche (jedenfalls nur beschränkt durch theoretische Überlegungen) gelöst werden kann, betrifft die Entwicklung einer so-

---

1 Vgl. z.B. Bruchmodell von Braunfeld

wohl der Theorie als auch alters- und kontextgemäßen Sprache. Wenn daher etwa Ableitbarkeit, Zulässigkeit etc. durch Zeichen wie Abl, Zul repräsentiert werden, so sollten diese Ansätze lediglich als erster Schritt im Hinblick auf die Lösung des aufgeworfenen Problems aufgefaßt werden. Nur in der Schulwirklichkeit kann entschieden werden, welche Konkretisierungen sich bewähren. In einem 8. bzw. 12. Schuljahr des Gymnasiums konnte ich mich zumindest von der Praktikabilität gewisser Teile meiner Vorschläge überzeugen. Um gewisse Teile des Programms auch in der Grundschule realisieren zu können, dürfte eine stärkere sprachliche Elementarisierung notwendig sein.
Was die innere Gliederung der folgenden Abschnitte angeht, wurden zu den jeweils relevanten Begriffen und Methoden typische Aufgabenstellungen formuliert, die für einen Unterrichtskurs ebenfalls zumindest in ihrer Breite ergänzungsbedürftig sind. Begriffe werden operational (operativ) definiert; im Unterricht empfiehlt sich die exemplarische Einführung [1] und Einübung der betreffenden Prädikatoren.

α) Propädeutik

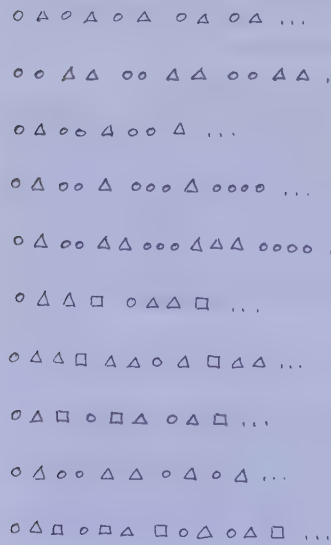
Zunächst werden den Schülern in einer Phase des freien Spiels Gelegenheiten geboten mit herkömmlichen Material (Logische Blöcke, Logische Plättchen, Formenspiel, Reihenblöcke, Cuisenaire Stäbe) selbstgewählte Muster herzustellen und auf diese Weise Materialerfahrungen zu sammeln. Aus den vielfältigen, auch flächigen Legemöglichkeiten werden für die weitere Beschäftigung die linearen Anordnungen herausgehoben und als Reihenmuster (Muster, Figur) bezeichnet. Um zu einer einheitlichen Beschreibung der Muster zu kommen, ist die Klärung räumlicher Ordnungsbegriffe erforderlich wie: unterhalb, oberhalb, rechts neben, links neben, gerade, krumm etc. Ferner muß in einer Art Figurenkunde gelernt werden, das Spielmaterial in seinen geometrischen Formen erkennen und bezeichnen zu können.
Erst im Anschluß an diese Vorbereitungen hat es Sinn zur Beschreibung der hergestellten Reihenmuster aufzufordern, die z.B. im Unterrichtsversuch durch einen offensichtlichen Hang zur Symmetrie zunächst sehr regelmäßig ausgefallen sind.

---

1 Durch Beispiele und Gegenbeispiele.

In der Phase des gelenkten Operierens wird die von den Kindern selbst ins Spiel gebrachte Regelhaftigkeit weiter ausgebaut, indem sie das schematische Operieren zunächst aktiv erfahren ehe sie zur Formulierung von Regeln aufgefordert werden.

Aufgabe. (Fortsetzung von Reihenmustern)
Setze die folgenden Muster fort!



Aufgabe. (Vermutung von Regeln; Kontrolle)

Nach welchen Regeln sind die Muster der obigen Aufgabe hergestellt?
Überprüfe daraufhin die gewählten Fortsetzungen.
Kann die Regel so geändert werden, daß dann sowohl der gegebene Musteranfang als auch die Fortsetzung regelgerecht ist?
Stimme die Fortsetzung auf die gewählte Regel ab!

Als nächstes sollen je zwei Muster miteinander unter folgenden Aspekten verglichen werden.
a) Gleichzahligkeit
b) Formgleichheit
c) Ähnlichkeit

Aufgabe (Relation der Gleichzahligkeit zwischen Mustern)
In einer Druckerei wird eine Sortierung von Musterpaaren vorgenommen. Links werden die brauchbaren, rechts die unbrauchbaren Figurenpaare eingeordnet [1]. Unter welchem Gesichtspunkt wird sortiert?

Brauchbar	Unbrauchbar
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ △ ○ △ □ ○ □ □	○ △ ○ △ □ □ ○ △ ○
△ □ △ □ □ ○ ○ △ ○ □	△ ○ △ △ ○
○ △ □ □	○ ○ ○ ○ △ ○ △ △ ○
△ △ △ ○ □ ○ ○ □ □ ○ ○ △ ○ □	△ ○ ○ △ ○ □ ○ □ ○ △ △ ○
⋮	⋮

Definition. Zwei Figuren heißen gleichzahlig, wenn ein sukzessiv von links nach rechts an den Elementen beider Muster durchgeführtes Abhakverfahren in beiden Mustern beim letzten Element endet.

Aufgabe. (Formgleichheit von Mustern)
Nun wird eine weitere Sortierung von Musterpaaren vorgenommen. Unter welchem Gesichtspunkt wird sortiert?

Brauchbar	Unbrauchbar
△ ○ △ □ △ ○ △ □	△ ○ △ □ △ ○ △ □ □
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○ △ ○ ○
○ △ ○ △ △ □ ○ ○ △ ○ △ △ □ ○	△ △ △ △ △ △ △ △ △
○ △ ○ △ ○ △ ○ △ ○ △ ○ △	○ △ ○ △ ○ △ ○ △ ○ △
⋮	⋮

1 Die Paare stehen jeweils untereinander

Definition. Zwei Figuren heißen formgleich, wenn der (von links) nach rechts durchgeführte) sukzessive Vergleich zu Figurenelementen (Plättchen) gleicher Form führt.

Aufgabe. Gib zu ○△○○ , △○○△○ , □○△○○△ ,...

a) gleichzahlige b) formgleiche Muster (Figuren) an!

Wir haben die Eigenschaften "formgleich", "gleichzahlig" zur Verfügung.
Ergänze die folgenden offenen Sätze und begründe
Zwei gleichzahlige Muster sind ...
Zwei formgleiche Muster sind ...
Unter welcher Bedingung sind zwei Muster nicht formgleich?
Belege Vermutungen durch Beispiele und Gegenbeispiele.

Die Definition der Relation "formgleich" enthält einen verborgenen Allquantor, der operativ durch die Anweisung "sukzessiver Vergleich" ausgedrückt ist. Um die Formgleichheit zweier endlicher Muster festzustellen, wird das Verfahren der (sukzessiven) Inspektion angewandt. Im letzten Teil der obigen Aufgabe soll aufbauend auf die Erfahrungen beim Sortieren die Negation einer Allaussage erarbeitet werden.

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit der Ähnlichkeit von Mustern. Die Begriffsbildung erfolgt wieder in einem Sortierspiel.

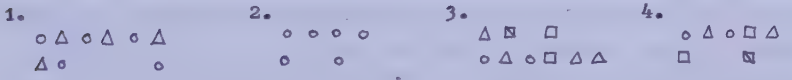
Aufgabe. Unter welchem Gesichtspunkt werden die abgebildeten Figurenpaare sortiert?

Brauchbar	Unbrauchbar
○△○△○ △○△○△	○△○△○ △○△△○

usw. usw.

Aufgabe. Wende die Vermutungen über das Sortierungsschema an, indem du die folgenden Musterpaare zu brauchbaren Figurenpaaren ergänzt.

1. 2. 3. 4.



5. 6. usw.

Aufgabe. In den obigen Musterpaaren sind jeweils mehrere Paare von Figurenelementen vorgegeben. Bei welchen Musterpaaren käme man mit weniger Paaren von Figurenelementen aus? Beachte u.a. das vierte Muster.

Aufgabe. Ergänze gemäß dem obigen Sortierschema die folgenden Muster zu brauchbaren Figurenpaaren.

7. 8. 9.

Wird ein Figurenelement a (und damit alle dazu formgleichen Elemente) eines Musters A durch das Figurenelement b ersetzt, so schreibt man $a \longrightarrow b$.

Beispiel.

Im 1. Musterpaar wird ○ ersetzt durch △ ($\circ \longrightarrow \triangle$)

" " wird △ ersetzt durch ○ ($\triangle \longrightarrow \circ$)

Analog zu diesem Beispiel sollen die folgenden offenen Sätze bzw. die offenen symbolischen Darstellungen ergänzt werden. Als Grundlage dienen die Figurenpaare der beiden letzten Aufgaben.

Aufgabe. Ergänze!

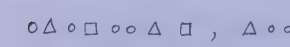
Im ... Musterpaar wird ... ersetzt durch ...

Symbolisch: ... ⟶ ...

Definition. Werden in einem Muster A formgleiche Figurenelemente durch formgleiche und verschiedene Figurenelemente durch verschiedene Figurenelemente ersetzt, so erhält man ein zu A ähnliches Muster B [1]. Die Art der Ersetzung wird in einer Ersetzungsregel mitgeteilt.

Bemerkung. Die Substitution kann bei manipulierbarem Material effektiv ausgeführt werden, während dies bei der ikonischen Darstellung mit technischem Aufwand (radieren u.a.) verbunden ist. Für die Durchschauung des Ersetzungsprozesses scheint es günstiger zu sein, das Figurenpaar vergleichen zu können.

Aufgabe. Gegeben sind die Muster



und die Ersetzungsregeln

Stelle ähnliche Muster her

Aufgabe. Gegeben sind Paare von ähnlichen Mustern

Finde die Ersetzungsregeln.

Aufgabe. Gegeben sind die folgenden Figuren.

Finde die Ersetzungsregeln die A in B bzw. B in C überführen.

---

1 Der Problemkomplex "ähnliche Muster" dient unter dem Aspekt des Zuordnungs- bzw. Codierungsspiels auch der Vorbereitung des Abbildungsbegriffes.

Sind A und C ähnlich? wie lautet die Ersetzungsregel? Kann man diese Ersetzungsregel aus den beiden anderen gewinnen?

Aufgabe. Gegeben ist das Muster A: ○△○○△○△ und die Ersetzungsregel R: ○ ⟶ △ , △ ⟶ ○

Konstruiere das zu A ähnliche Muster A′ und wende darauf erneut R an.
Diese Aufgabe kann auch für zwei Personen formuliert werden (Möglichkeit des Wettbewerbs).

Aufgabe. Ein Schüler gibt eine Figur A vor. Sein Partner soll eine Ersetzungsregel[1] angeben, die nach zwei- (drei-) maliger Anwendung auf A wieder A liefert. Nun werden die Rollen vertauscht. Gezählt wird die Anzahl der Erfolge.

Aufgabe. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Eigenschaften gleichzahlig, formgleich, ähnlich von Musterpaaren?

Oben wurde bereits in einer Aufgabe die Eigenschaft der Transitivität der Ähnlichkeit von Musterpaaren behandelt. Dieses Thema bietet Gelegenheit zu einer Einführung in den Beweis von Allaussagen auf dem sog. produktiv-konkreten Leistungsniveau (vgl. S.163).
Sind a, b, c Variablen für Figuren und wird die Ähnlichkeitsrelation mit "$\sim$" bezeichnet, so gilt

$$\bigwedge_{a,b,c} (a \sim b) \wedge (b \sim c) \longrightarrow (a \sim c)$$

Man sagt, der Schüler verfügt über ein produktiv-konkretes Beweisschema dieser Aussage, wenn er bei konkret vorgegebenen Figuren a, b, c aus den zu $a \sim b$ und $b \sim c$ gehörenden Ersetzungsregeln sozusagen "mechanisch" eine Ersetzungsregel für $a \sim c$ angeben kann.

Beispiel: 1. ○△○△△ ähnlich zu ○□○□□ und

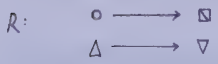
2. ○□○□□ ähnlich zu ◹▽◹▽▽

---

1 Natürlich eine von der Identität verschiedene Abbildung!

Ersetzungsregeln

Die perforierte Linie deutet symbolisch den Ersetzungsvorgang an, der zur Regel R führt.



Die Ähnlichkeitsrelation zwischen Mustern kann verallgemeinert werden. Hier bietet sich eine gute Gelegenheit für herausfordernde Probleme an: nenne weitere Möglichkeiten für den Vergleich von Musterpaaren!, treten schon besprochene Relationen als Spezialfälle auf?, stelle selbst ein "brauchbar - unbrauchbar" Sortierschema auf! etc.

Es empfiehlt sich, den naheliegenden Begriff des Teilmusters (Teilfigur) einzuführen, um das folgende präzis beschreiben zu können [1]. Bei ähnlichen Figuren werden mit gewissen Nebenbedingungen ("systematisch") Figurenelemente durch Figurenelemente ersetzt, verallgemeinert man die Ersetzung auf Teilfiguren, so sollen die betreffenden Musterpaare fastähnlich heißen. Da man gerne haben möchte, daß die Kinder selbst auf diese Relation stoßen, wäre es vielleicht methodisch angebracht, in Verbindung mit dem Begriff der Teilfigur die Ähnlichkeit von Mustern zu reflektieren.

Der weitere Fortgang der Lektion über Fastähnlichkeit sollte in der Hauptsache der Eigeninitiative der Lernenden überlassen werden, sie sind dabei aufgefordert,einen vertikalen Transfer vom Problemkreis "Ähnlichkeit" auf das neue Thema vorzunehmen. Phasen der Instruktion werden sich aber wohl kaum vermeiden lassen.

Die nächsten Aufgaben behandeln den Begriff der Periodizität von Mustern.

Ein Muster soll unter Verwendung eines Druckstempels - z.B. im Kartoffeldruck - hergestellt werden. Welches Grundmuster muß der Stempel tragen?

---

1 Wir beschränken uns auf zusammenhängende Teilfiguren, wobei natürlich im Unterricht die Unterscheidung zu nicht zusammenhängenden Teilfiguren (Begriffsdiskrimination) thematisiert werden sollte, wodurch ein topologischer Akzent gesetzt wird.

Beispiel.

Muster: ○△○△○△○△○△ ...

Grundmuster: △, ○△○△, ...

Nicht Grundmuster: ○, △, ○△○, △○△, ...

Aufgabe. Mit welchen Grundmustern lassen sich die Figuren der ersten Aufgabe herstellen (nun sind auch mehrere Stempel zugelassen). Wieviele Grundmuster benötigt man für die betreffenden Figuren mindestens?

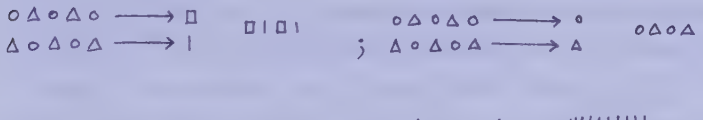
Aufgabe. Es soll das Muster ○△□ ○□△ □○△○△□... hergestellt werden; Grundmuster? Welche Eigenschaften haben jeweils Paare von Grundmustern?

Aufgabe. Wie müssen die Grundmuster △○, ○△○, ... verändert werden, damit ○△○△○△○△ ... hergestellt werden kann?

Aufgabe. Stelle fastähnliche Muster zu ○△○△○△○△○△○△○△○△○△○△ (M) her!

Unter den vielfältigen Lösungsmöglichkeiten dieser Aufgabe nehmen diejenigen eine besondere Rolle ein, bei denen die codierten Teilfiguren sämtlich gleichzahlig sind.

Beispiele für fastähnliche Codierungen.



Aufgabe. Alle codierten Teilfiguren seien paarweise gleichzahlig. Welche der folgenden Muster sind fastähnlich zu M ?

□△□△ , △○△○ , ○△○△○ , ||||| , ○|○|○| , ○|○|○|○

Durch diese Aufgabe können arithmetische Gesichtspunkte ins Spiel gebracht werden; die Eigenschaft der Fastähnlichkeit kann arithmetisch entschieden werden.

Aufgabe. Wie kann die vorangehende Aufgabe variiert werden?
Die interessanteste Variation dürfte das Weglassen der vorausgesetzten paarweisen Gleichzahligkeit bewirken.

Aufgabe. Ist das folgende Muster fastähnlich zu M ?

□ | □ | □ | □ | □ |

Diese Aufgabe dürfte eine echte Herausforderung an die Kinder darstellen, da sich unter den Lösungen zur ersten Aufgabe über Fastähnlichkeit gewiß ein zu ○○○○○○○○○○ ähnliches Muster befindet und der Vergleich mit dem Muster der letzten Aufgabe einen geistigen Spannungszustand schafft.
Die Analyse von □|□|□|□|□| zeigt, daß zwei Teilmuster von M codiert worden sind, die andererseits nicht gleichzahlig sein können. Nun muß der Lernende eine Reihe von Überlegungen anstellen, um zu einer Lösung zu gelangen, die mit diesen beiden Bedingungen im Einklang steht.
An Codierungsmöglichkeiten ergeben sich:

$$\circ \longrightarrow \square \qquad \circ\triangle\circ \longrightarrow \square$$
$$\triangle\circ\triangle \longrightarrow | \quad \text{bzw.} \quad \triangle \longrightarrow |$$

Auch die letzte Aufgabe kann arithmetisch entschieden werden, handelt es sich doch darum, die Diophantische Gleichung $5x + 5y = 20$ (mit der Nebenbedingung $x \neq y$) zu lösen. Damit ist aber auch ein natürlicher Ansatzpunkt für die Behandlung Diophantischer Gleichungen geschaffen.

Aufgabe. Wie muß das Muster M verändert werden, damit die Figur ○△○△○△○ fastähnlich zu M wird.

Bei dieser Aufgabe (die vielfältige Lösungen hat) soll u.a. die Eigenaktivität der Kinder angeregt werden.

Aufgabe. Das Muster △○△○△○ ist fastähnlich zu ○△○△○△○△○△○△○△○△○△○△○
Diese Problemstellung kann mit der Diophantischen Gleichung $3x + 3y = 18$ in Verbindung gebracht werden, und läßt u.a. folgende Codierungen zu

$$\triangle\circ\triangle\circ\triangle \longrightarrow \circ \qquad \circ\triangle \longrightarrow \triangle \qquad \circ\triangle\circ \longrightarrow \triangle \qquad \circ\triangle\circ\triangle \longrightarrow \triangle$$
$$\circ \longrightarrow \triangle\,, \qquad \circ\triangle\circ \longrightarrow \circ\,, \qquad \triangle\circ\triangle \longrightarrow \circ\,, \qquad \circ\triangle \longrightarrow \circ$$

Aufgabe. Gegeben sind folgende Muster:

a) ○○△△△○○△△△○○△△△○○△△△ b) ○△○○○○△○○○○△○○○○△○○○

c) ○△□○○□○△□○○□ d) ○△□○□△□○△○△□○□△□○△○△□

e) ○△○○△○○○△○○○○△○○○○○△

Gib dazu fastähnliche Muster an!

Der wesentliche Gesichtspunkt bei dieser Aufgabe besteht darin, die Möglichkeit der "Strukturvereinfachung" der Muster a) - d) bis zum "konstanten" Muster (bei dem alle Elemente formgleich sind) zu erkennen.

Beispiel: zu c) Die Codierung $○△ \longrightarrow ○$, $□○ \longrightarrow △$, $○□ \longrightarrow □$ liefert ○△□○△□ , die Codierung $○△□ \longrightarrow ○$, $○○□ \longrightarrow △$ ergibt ○△○△ und die Codierung $○△□○○□ \longrightarrow ○$ führt zu ○○
Von Strukturvereinfachung kann man in den beiden letzten Fällen sprechen. Beim Muster e) erhält man (im Vergleich zu a) – d)) dagegen als einziges konstantes Muster ein einelementiges Muster.
Mit diesen Überlegungen hat man aber schon den wesentlichen Aspekt der Periodizität von Mustern getroffen: gibt es zu einem Muster A ein dazu fastähnliches konstantes Muster (mit mehr als einem Element), so heißt das Muster A periodisch.
Das herausfordernde Problem, nach Beziehungen zwischen den beiden Relationen "ähnlich" und "fastähnlich" zu suchen, führt zu einem neuen und interessanten Thema: unendliche Muster. Denn nur für unbegrenzt fortsetzbare Muster[1] kann es vorkommen, daß fastähnliche Muster sogar ähnlich sind.
Auf der Grundlage der bisherigen Vorbereitungen soll jetzt eine schematische Darstellungsform für Kalküle entwickelt werden.
Wir kehren wieder zu unserem Druckerei-Kontext zurück. Ein Drucker erhält folgenden Auftrag:
Stelle ein Muster aus den Figurenelementen ○ und △ her.
Beginne mit dem Musteranfang ○ !
An eine schon hergestellte Figur, die mit ○ endet, füge △ an!
An eine schon hergestellte Figur, die mit △ endet, füge ○ an!

---

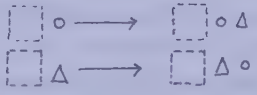
1 Vorausgesetzt wird natürlich, daß mindestens zweielementige Teilmuster codiert werden.

Die sprachliche Formulierung der Regeln mit Hilfe des unbestimmten Artikels "eine" gestattet es,Variablen zunächst zu vermeiden.

Symbolische Darstellung

Figurenelemente : ○ , △

Figurenanfang: ○
(Anfangsfigur)

Regeln : 

Durch wird die Variable mitgeteilt; man könnte sie durch ein besonders gefärbtes Kärtchen markieren, das "mit Teilmustern belegt wird". Da diese Darstellungsform etwas umständlich ist, könnte der Übergang zur üblichen Buchstabennotation als Erleichterung empfunden werden.

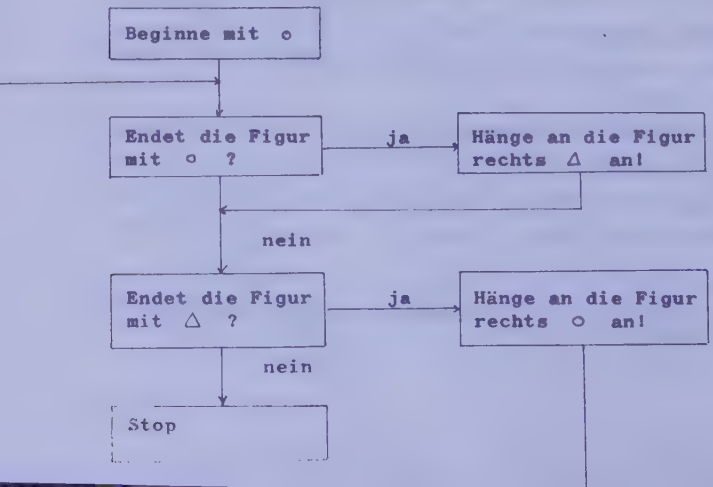
Figurenelemente: ○ , △
(Elemente)

Anfangsfigur: ○

Regeln : $a\circ \longrightarrow a\circ\triangle$
$a\triangle \longrightarrow a\triangle\circ$

Man kann einen Kalkül auch durch ein Flußdiagramm darstellen, das die auszuführenden Operationen besonders deutlich erkennen läßt.

Figurenelemente: ○ , △



β) Protologische Spiele

Während in der Propädeutik elementare Figurenkenntnisse sowie Methoden zum Vergleich von Figuren erworben werden sollten, die zu einfachsten syntaktischen Beweisaufgaben führten, kreisen die Probleme des vorliegenden Abschnitts um die Begriffe der Ableitbarkeit von Figuren, der Zulässigkeit von Regeln sowie um die "Genealogie" von Figuren.

Der Druckereikontext wird beibehalten; die im letzten Abschnitt entwickelte schematische Darstellungsform von Kalkülen dient zur Mitteilung von Druck- bzw. Figurenherstellungsverfahren. Ist ein solches Druckverfahren K gegeben, so soll für eine Figur (Muster) A das Zeichen $\mathrm{Abl}_K A$ die Behauptung bedeuten: "Die Figur A ist mit dem Druckverfahren K herstellbar." [1]

Die Verwendung des (bei festem Kalkül K einstelligen) Prädikators "ist herstellbar" bzw. "ist ableitbar", wird so geregelt, daß derjenige, der den sprachlichen Ausdruck $\mathrm{Abl}_K A$ setzt, damit rechnen muß, nach einer Herstellung von A gefragt zu werden, worauf er diese effektiv durchzuführen hat. Eine ähnliche Konvention soll für die später einzuführende Zulässigkeitsbehauptung gelten.

Die Grundlage der weiteren Ausführungen bilden die folgenden Druckverfahren.

K_1 **Figurenelemente:** $\circ, x$

Anfangsfigur : x

Regeln : $a \longleftrightarrow a\circ$ [1] (R_1)

: $a \longleftrightarrow \circ ax$ (R_2)

K_2 **Figurenelemente:** $\circ, |$

Anfangsfigur : $|$

Regeln : $a \longleftrightarrow \circ a\circ$ (R_1)

$a \longleftrightarrow |a$ (R_2)

$a\circ \longleftrightarrow |a$ (R_3)

$a \longleftrightarrow \circ a$ (R_4)

---

1 Wir kehren sodann wieder zu der Sprechweise zurück: "Die Figur A ist im Kalkül K ableitbar".

2 Das Zeichen "$\longleftrightarrow$" bedeutet, daß sowohl $a \longrightarrow a\circ$ als auch $a\circ \longrightarrow a$ eine Regel des Kalküls ist und somit die eine als invers zur anderen aufgefaßt werden kann. (i- KalKül)

K_3 Figurenelemente: o, x
Anfangsfigur : x
Regeln : a $\longrightarrow$ xax (R_1)
xa, ax $\longrightarrow$ o a o (R_2)

K_4 Figurenelemente: o, x
Anfangsfigur : o
Regeln : ao $\longleftrightarrow$ aox (R_1)
ax $\longleftrightarrow$ axo (R_2)

Als Hintergrund der ersten Aufgabe könnte der folgende Kontext dienen.
Eine Druckerei macht über die Herstellbarkeit bzw. Nichtherstellbarkeit[1] von Mustern Angebote. Die Angebote sind zu überprüfen.

Aufgabe. Überprüfe die folgenden Angebote!

1. Abl_{K_1} o xx 2. Abl_{K_1} o xx o 3. $\overline{Abl}_{K_1}$ oo xx o x 4. $\overline{Abl}_{K_2}$ oo

5. Abl_{K_2} /// 6. Abl_{K_2} /o/ 7. $\overline{Abl}_{K_2}$ o/o/o 8. Abl_{K_3} o x x x o

9. Abl_{K_3} xxxx 10. $\overline{Abl}_{K_3}$ oo 11. Abl_{K_4} o 12. Abl_{K_4} o x o x

13. $\overline{Abl}_{K_4}$ o x o x o usw.

Beachte insbesondere 3. 4. 7. 10. 13.

Wenn jemand z.B. in der Lage ist, mit dem Verfahren K_1 die Figur o o x x o x herzustellen, dann hat er die Aussage Abl_{K_1} o o x x o x <u>widerlegt</u>.
Die Übungen zeigen, wie Aussagen über die Herstellbarkeit (Nichtherstellbarkeit) von Figuren bewiesen (widerlegt) werden:
durch Angabe der jeweiligen Ableitung. Die vierte Teilaufgabe bringt etwas neues: hier soll offenbar eine Aussage über die Nichtherstellbarkeit einer Figur bewiesen werden. Dazu sind einige Vorbereitungen zu treffen.
Bei der Herstellung einer Figur B geht man entweder von einer Anfangsfigur oder einer schon hergestellten Figur aus; ist B aus A

---

1 Wird behauptet, daß die Figur A im Kalkül K nicht ableitbar (herstellbar) ist, so schreibt man dafür Abl_K A.

ableitbar, so heiße A Vorfahre von B. Alle aus einer Figur A ableitbaren Figuren heißen Nachkommen von A. Nach der Häufigkeit der zur Anwendung gelangenden Regeln lassen sich in naheliegender Weise Vorfahren und Nachkommen einer Figur nach Generationen unterscheiden. Die Figuren A und B heißen verwandt, wenn A Vorfahre von B oder B Vorfahre von A ist.

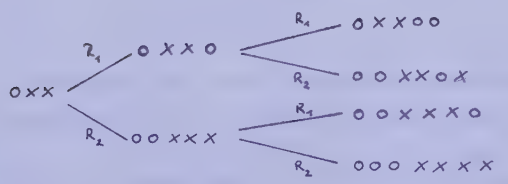
Beispiel. In K_1 ist die Figur ○xx○○ ein Nachkomme der 2. Generation von ○xx . ○xx○○ und ○xx sind somit verwandte Figuren.

$$\circ xx \xrightarrow{R_1} \circ xx\circ \quad , \quad \circ xx\circ \xrightarrow{R_1} \circ xx\circ\circ$$

Betrachtet man die logische Form der Definition
"Die Figuren A, B sind verwandt, genau dann, wenn A ableitbar ist aus B oder B ableitbar ist aus A", so stellt man fest, daß zum Beweis der Aussage "Die Figuren A, B sind verwandt" mindestens eine der beiden Aussagen "A ist ableitbar aus B", "B ist ableitbar aus A" effektiv bewiesen werden muß. Dem logisch "oder" der obigen Definition entspricht auf der Ebene der Beweishandlungen ein praktisches "oder".
Ist A eine in einem Kalkül K herstellbare Figur, so bedeutet die Herstellung der Vorfahren bzw. Nachkommen von A ein Operieren gemäß der in Abschnitt 3 erörterten F-Gruppierung.

Aufgabe. Bestimme alle Nachkommen der 2. Generation von ○xx (bzgl. K_1)

Bemerkung. Bei höheren Generationen wird die lineare Darstellung von Ableitungen meist unübersichtlich, daher bedient man sich zur Darstellung eines Baumdiagramms. Für den obigen Fall:



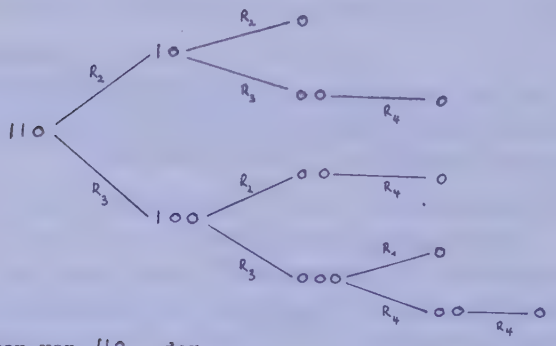
1. Generation 2. Generation

Die Aufgabe kann in den Parametern "Generation", "gegebene Figur", "Druckverfahren" in naheliegender Weise variiert werden.

Aufgabe. Bestimme die Vorfahren der 2. Generation folgender Figuren (K_1) ooo xxxx , oo xxx o , oo xx o x , o xx oo
Varianten wie oben. Zusätzlich: Bestimme sämtliche Vorfahren der gegebenen Figuren bzgl. K_1 .
Ist eine Figur zu einem Strichlistenmuster der Länge n gleichzahlig, so sagt man, die Figur besitzt die Länge n .

Aufgabe. Gegeben ist eine Figur A und ein Druckverfahren K
Stelle sämtliche Nachkommen (Vorfahren) von A einer festen Länge her.
Mit der Bestimmung der Vorfahren einer gegebenen Figur A in einem Druckverfahren K wird die Entscheidung von Behauptungen des Typs Abl_K A bzw. $\overline{Abl}_K$ A ermöglicht. Ist nämlich die Figur A mit einer Anfangsfigur verwandt oder besitzt A einen ableitbaren Vorfahren, so ist A ableitbar. Ist dagegen keiner der Vorfahren von A eine Anfangsfigur (oder ableitbare Figur), so gilt $\overline{Abl}_K$ A .

Aufgabe. Beweise oder widerlege Abl_{K_2} ||o
Über ein Baumdiagramm werden die Vorfahren von ||o bestimmt



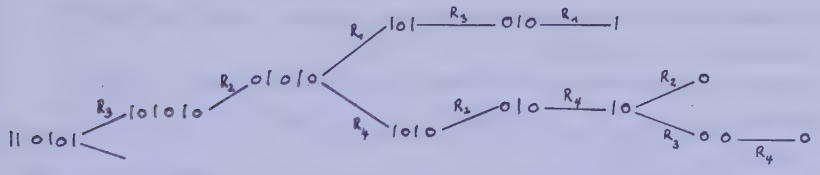
Vorfahren von ||o der
1. Generation : |o , |oo
2. " : o , oo , ooo
3. " : o , oo
4. " : o

Da keiner der möglichen Vorfahren von $||o$ eine Anfangsfigur ist, gilt $\overline{\text{Abl}}_{K_2}\, ||o$

Aufgabe. Beweise oder widerlege $\text{Abl}_{K_2}\, ||o|o|$.

Der Baum zur Ermittlung der Vorfahren von $||o|o|$ wird recht umfangreich. An Beispielen dieser Art soll der Schüler lernen, daß es zum Beweis einer Ableitbarkeitsaussage genügt, im Baum einen mit einer Anfangsfigur endenden Zweig zu finden, während zum Beweis einer Unableitbarkeitsaussage das Aufsuchen sämtlicher Vorfahren der Figur notwendig ist.

Ausschnitt aus dem Baumdiagramm zur Bestimmung der Vorfahren von $||o|o|$ bzgl. K_2 .



Würde man nur den mit "o" endenden Zweig verfolgen, so würde man fälschlicherweise einen Beweis von $\overline{\text{Abl}}_{K_2}\, ||o|o|$ erschließen, während der mit "$|$" endende Zweig $\text{Abl}_{K_2}\, ||o|o|$ beweist. Durchläuft man das Diagramm in entgegengesetzter Richtung von rechts nach links, so erhält man eine Ableitung von $||o|o|$; schematisch:

$\|$	
$o\|o$	R_1
$\|o\|$	R_3
$o\|o\|o$	R_1
$\|o\|o\|o$	R_2
$\|\|o\|o\|$	R_3

An dem Beispiel läßt sich außerdem auf sehr treffende Weise der aussagenlogische Satz "ex falso quodlibet sequitur" operativ demonstrieren.

Offensichtlich gilt $\text{Abl}_{K_1}\, o|o$: $| \xrightarrow{R_1} o|o$ ist eine entsprechende Ableitung mit Anfangsfigur $|$, die als solche natürlich

ableitbar ist.
Andererseits kann o/o aus der nicht ableitbaren Figur o hergestellt werden: $o \xrightarrow{R_2} /o \xrightarrow{R_4} o/o$

Aus einer nicht ableitbaren Figur (o) können somit ableitbare (o/o) oder nicht ableitbare Figuren (/o) hergestellt werden.
In diesem Zusammenhang wäre es interessant zu prüfen, in wieweit sich der operative Zugang zu dem o.g. aussagenlogischen Prinzip günstig auf das spätere Verständnis der logischen Implikation auswirkt.

Als nächstes wenden wir uns den Begriff der Erweiterung von Kalkülen zu.

Aufgabe. Ist die Figur xoxo mit dem Druckverfahren K_4 herstellbar? Wie müßte das Druckverfahren verändert werden, damit das Muster xoxo hergestellt werden kann?
Möglichkeiten: Man könnte zusätzliche Anfangsfiguren, etwa x bzw. xoxo zulassen, oder K_4 durch eine weitere Regel z.B.
aoxo ——→ xoxo ergänzen.
Beide Erweiterungen führen jedoch zu Figuren, die mit dem Verfahren K_4 nicht herstellbar sind. Eine Erweiterung eines Kalküls K durch Anfangsfiguren A bzw. Regeln R heißt zulässig, wenn nach Erweiterung nicht Figuren ableitbar sind, die es vordem nicht waren. Man spricht dann auch von einer zulässigen Anfangsfigur bzw. von einer zulässigen Regel. Schreibweise: $Zul_K A$ bzw. $Zul_K R$
Im Druckereikontext ließe sich der Begriff der zulässigen Erweiterung folgendermaßen motivieren. Ließe man beliebige Erweiterungen von Druckverfahren zu, so könnten von <u>einer</u> Druckerei beliebige in Auftrag gegebene Muster hergestellt werden. Damit wäre einerseits die betreffende Druckerei überlastet, und andere Druckereien ohne Auftrag. Um eine ausgeglichene Beziehung zur Konkurrenz zu haben, sollen Druckverfahren nur im o.a. Sinne zulässig erweitert werden dürfen.

Aufgabe. Ein Drucker erweitert das Druckverfahren K_1 durch die Anfangsfigur oxox . Wie kann er beweisen, daß oxox eine bzgl. K_1 zulässige Anfangsfigur ist?
Die Lösung der Aufgabe kann wieder in zwei verschiedenen Ebenen erfolgen. Auf produktiv-konkretem Niveau müßte für jede konkret gegebene Figur A, die aus der Anfangsfigur oxox abgeleitet wird, eine Ab-

leitung mit Anfangsfigur x gefunden werden, die somit die Anfangsfigur oxox eliminiert.
Die Elimination von oxox aus einer Ableitung von A erfolgt durch die Verknüpfung zweier Ableitungshandlungen: 1. der Ableitung von oxox aus x und 2. der Ableitung von A aus oxox

Beispiel: Ableitung von ooxoxxo

x		oxox		somit	x	
xo	R_1	ooxoxx	R_2		xo	R_1
oxox	R_2	ooxoxxo	R_1		oxox	R_2
					ooxoxx	R_2
					ooxoxxo	R_1

Für eine beliebige vorgegebene, aus oxox ableitbare Figur A wird auf dem produktiv-formalen Niveau die Elimination von oxox in einem Eliminations-Schema mitgeteilt:

x		oxox	somit	x	
xo	R_1	⋮		xo	R_1
oxox	R_2	A		oxox	R_2
				⋮	
				A	

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Frage nach der Zulässigkeit der Erweiterung eines Kalküls K durch eine Figur A auf den Beweis von Abl_K A zurückgespielt wird.

Aufgabe. Ein Drucker behauptet Zul_{K_1} a ⟶ oaox
1. Stelle Figuren her indem du auch die Regel a⟶oaox (R_3) anwendest.
2. Können diese Figuren in K_1 auch ohne Verwendung der Regel a⟶oaox hergestellt werden?

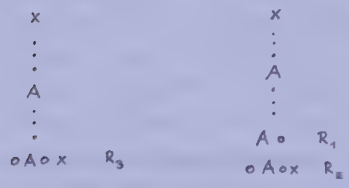
Beispiel. Wir bezeichnen den um R_3 erweiterten Kalkül K_1 mit K_1'. In K_1' wird die Figur ooxooxox abgeleitet.

1.	x		
2.	x o	R_1	Diese Ableitung in K_1' muß nun
3.	x oo	R_1	durch Elimination der Regel R_3 in
4.	o x o o x	R_2	eine Ableitung von o o x o o x o x in
5.	o o x o o x o x	R_3	K_1 übergeführt werden.

Dazu wendet man auf die Figur der 4. Zeile zunächst R_1, auf die entstehende Figur sodann R_2 an. Die 5. Zeile ist somit zu ersetzen durch:

$4'$.	o x o o x o	R_1
$4''$.	o o x o o x o x	R_2

Dieses Eliminationsverfahren kann wieder in Verbindung mit weiteren Beispielen auf produktiv-konkreter Stufe erarbeitet werden. Auf ein Eliminationsschema führt die folgende Überlegung. Eine Anwendung von R_3 setzt voraus, daß die Ableitung mit der Anfangsfigur x begonnen worden ist. Im weiteren Fortgang der Ableitung erfolgt die Umformung einer Figur A in die Figur o A o x mit Regel R_3. Diese Umformung kann ersetzt werden durch die Ableitung von A o aus A gemäß R_1 und die Ableitung von o A o x aus A o gemäß R_2. Schematisch:



Zur Elimination von R_3 ist also eine Verknüpfung mindestens zweier Ableitungsoperationen erforderlich.

In der folgenden Aufgabe soll die Kalkülmetaregel Zul_K A ⟶ B , Zul_K B ⟶ C ⟹ Zul_K A ⟶ C exemplarisch erarbeitet werden.

Aufgabe. Beweise die folgenden Zulässigkeitsaussagen.

1.	Zul_{K_1} o a o	⟶ l o a o
2.	Zul_{K_1} o a	⟶ o o a o
3.	Zul_{K_1} o a	⟶ l o a
4.	Zul_{K_1} l a	⟶ o l a

Was kann über die Zulässigkeit der Regeln $a \longrightarrow loao$,
$a \longrightarrow ooao$, $a \longrightarrow loa$, $a \longrightarrow o/a$
ausgesagt werden?

Durch Modifizierung der Aufgabendaten kann in naheliegender Weise das Aufgabenmaterial bereichert werden.

γ) Das Kalkülspiel "Seitenwechsel"

Das Einpersonenspiel "Seitenwechsel" ist ein Strategiespiel, das als solches im Gegensatz zu Glücks-Geschicklichkeits- und Nachahmungsspielen vorwiegend kognitive Fähigkeiten, wie "vorausschauendes und schlußfolgerndes Denken, Analysieren, Kombinieren" [1] anspricht. Wie im folgenden gezeigt wird, läßt es sich auch als Kalkülspiel zur Einübung syntaktischer Operationen verwenden. Gegenüber den bisher vorgestellten Spielen weist es den Vorzug einer geringen und damit gut zu überblickenden Zahl von Spielsteinen auf, mit denen dennoch eine Vielfalt von Figuren erzeugt werden kann.

Die Spielfläche ist ein genügend großer, in n (hier: n=5) Felder [2] unterteilter Streifen, der mit zwei verschiedenen Sorten Spielmarken ($\frac{n-1}{2}$ weiße und $\frac{n-1}{2}$ schwarze Marken) belegt ist. Jedes Feld trägt höchstens eine Marke.

Das Ziel des "Grundspiels" besteht darin, die folgende Anfangsfigur

○	○		●	●

unter Anwendung gewisser Spielregeln in die Endfigur

●	●		○	○

überzuführen.

Spielregel (S):

1. Es darf stets nur <u>eine</u> Spielmarke bewegt werden.
2. Die weißen Marken dürfen nur nach rechts, die schwarzen Marken nur nach links verschoben werden.
3. Marken dürfen nur auf ein freies Feld verschoben werden.
4. Ein benachbartes besetztes Feld darf in der erlaubten Richtung übersprungen werden, wenn das Feld dahinter frei ist.

Wird ein durch "Weiß" ("Schwarz") besetztes Feld durch "W" ("S"), das leere Feld durch "○" bezeichnet, dann lautet das Ziel des Grundspiels:

---

1 Gnirk-Homann-Lubeseder (1970) S. 11 ff

2 n soll eine ungerade Zahl größer drei sein.

Leite aus der Anfangsfigur A: WWOSS mit Hilfe der Regel (S) die Endfigur E: SSOWW her.
Eine mögliche Lösung dieser Aufgabe:

WWOSS 2. WOWSS 4. WSWOS 2. WSWSO 4. WSOSW 4.

OSWSW 2. SOWSW 4. SSWOW 2. SSOWW

Die Nummern geben die für den jeweiligen Ableitungsschritt verwendete Regel an.
Das Grundspiel kann modifiziert werden, indem andere Anfangs- bzw. Endfiguren vorgegeben werden.

Aufgabe. Leite aus den folgenden Anfangsfiguren
a) SSOWW b) WSOSW c) SWOWS d) SWOSW e) WSOWS

die Figuren SSOWW, WOWSS; WWOSS ... her.

Bemerkenswerterweise kann aus der Figur a) keine davon verschiedene Figur abgeleitet werden.

Aufgabe. Vergleiche die Ableitung von SSOWW aus WSOSW (b) mit der Ableitung von SSOWW aus WWOSS!

Während es zunächst so aussehen mag, als ob SSOWW aus jeder Anfangsfigur erzeugbar ist, wird mit den Anfangsfiguren d) und e) diese Meinung widerlegt.

Varianten des Spiels:
1. Die bisherige Sonderstellung des leeren Feldes innerhalb Anfangs- bzw. Endfiguren wird aufgegeben.
2. Die Spielfläche wird um ein weiteres leeres Feld ergänzt.
3. Die Anzahl n der Felder wird erhöht.

Die folgenden Aufgabenklassen sprechen das kombinatorische Denken an.

Aufgabe. Gegeben sei eine Figur A
a) Leite aus A sämtliche Vorfahren bzw. Nachkommen der ersten, zweiten, ... Generation ab und
b) stelle die Ableitungen in einem Baumdiagramm dar.

Bei der Ermittlung der Vorfahren einer Figur tritt gegenüber der Ableitung von Nachkommen etwas neues auf. Nachdem die Spielregeln ja nicht ohne weiteres invertiert werden können, sind zunächst Hypothesen bzgl. der Vorfahren zu bilden, die dann gemäß der Regeln veri-

fiziert werden können. Bei diesem Problem kann demonstriert werden, daß man sich bei der Formierung von Hypothesen zunächst über konventionelle Regeln hinwegsetzen darf - in einer heuristischen Überlegung nimmt man an, die Regeln seien invertierbar - während ihr Beweis die Respektierung des betr. Regelsystems erfordert.

Aufgabe. Gib Figuren an, die keine Vorfahren besitzen.

Beispiele: SSWWO , OSSWW

In einer abschließenden Aufgabe soll die Eigenschaft der Transitivität von Ableitungsoperationen "erspielt" werden.

Aufgabe. Auftrag an Schülergruppe A : Leite die Figur WSOSW aus der Figur WOWSS ab.
Auftrag an Schülergruppe B : Leite die Figur SSWOW aus der Figur WSOSW ab.
Ist SSWOW ein Nachkomme von WOWSS ?
Ist WOWSS ein Vorfahre von SSWOW ?

c) Kalkülspiele am Papyschen Minicomputer mit ebener Figurenkonstellation.

Die bisher erörterten Kalkülspiele führten zu linearen Figurenkonstellationen. Ein reizvoller Themenkreis, der zu ebenen Figurenanordnungen führt, sind die von H. Markwald unter algorithmischen Aspekten diskutierten Zellautomaten [1]. Die Markwaldschen Untersuchungen zeigen, daß sich an diesen durch Kalküle beschreibbaren Prozessen wichtige mathematische Begriffe und Problemstellungen im Unterricht erörtern lassen. Für die hier verfolgten Zwecke des syntaktischen Beweisens sind die sog. birth-processes m.E. für Schüler der Primar- bzw. Sekundarstufe I weniger geeignet, da einerseits die betreffenden Kalkülregeln recht schwierig aufgebaut sind und sich andererseits häufig schon nach wenigen Spielzügen (Generationen) schwer durchschaubare Figurenkonstellationen ergeben. Durch diese technischen Schwierigkeiten wird aber dann das primäre Anliegen, nämlich die grundlegenden Begriffe der Ableitbarkeit, Zulässigkeit etc. zu modellieren, in den Hintergrund gedrängt. Im Rahmen der Sekundarstufe

---

1 H. Markwald $(1972)_2$ S. 73 ff

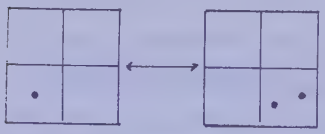
II könnte dieser Themenbereich die Gelegenheit bieten, schon vorhandene Fähigkeiten im syntaktischen Folgern in Verbindung mit anderen Beweismethoden (Vollständige Induktion, indirekter Beweis) in einem Problemkreis anzuwenden, der sich noch in lebhafter Entwicklung befindet, und in dem man schnell zu tiefer liegenden Sätzen vordringen kann.

Zu einem sehr einfachen Kalkülspiel mit ebener Figurenkonstellation gelangt man auf der Grundlage von Papys Minicomputer, wenn man die Ersetzungs- und Übergangsregeln beibehält (bzw. modifiziert) und den arithmetischen Aspekt des Minicomputers zunächst "vergißt".

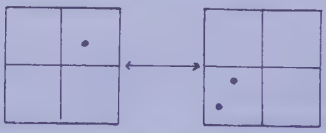
Belegungen der Spielfelder mit Spielsteinen heißen Figuren - es soll dabei nur auf die Anzahl der Spielsteine auf einem Feld, nicht dagegen auf deren Anordnung innerhalb des corrés ankommen.

Die Spielregeln der ersten Spielversion können folgendermaßen ikonisch dargestellt werden.

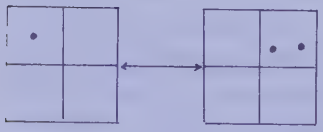
R:



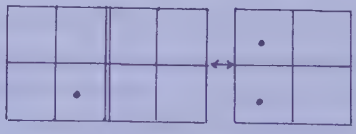
1a



1b



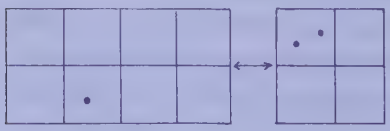
1c



2

Eine zweite Spielversion gewinnt man, wenn die Regeln 1a - 1c beibehalten werden und Regel 2 abgeändert wird zu

R': Regeln 1a - 1c ferner

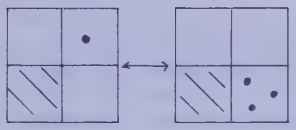


2'

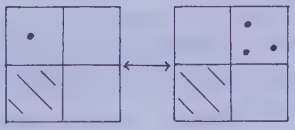
Eine weitere Variante ergibt sich, wenn man von der zweier - Belegung in R bzw. R' zu dreier - Belegungen auf drei Feldern übergeht

R'':

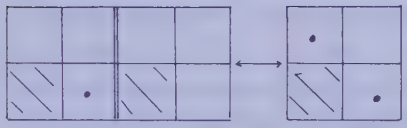
1a



1b



2



Natürlich kann man dieses Spiel auch auf den Tafeln des Minicomputers durchführen; dazu muß nur auf jeder Tafel ein Feld abgedeckt werden.

Beispiel. Die schraffierten Felder werden nicht als Belegungsfelder verwendet.

Ändert man in R'' die Regel 2 analog zu $2'$ ab, so entsteht eine vierte Spielvariante.

Jede einzelne Spielregel kann als Substitutionsregel gedeutet werden. Wird eine Regel im Sinne von "$\longrightarrow$" angewandt, so wird dadurch die Zahl der Spielsteine <u>vermehrt</u>; im anderen Fall ("$\longleftarrow$") ist die Anwendung der Regel mit einer Verminderung von Spielsteinen verbunden. Im folgenden sind einige grundlegende Angabentypen zusammengestellt.

1. Gegeben ist eine zur Reduzierung von Spielsteinen geeignete Figur A.
   a) Leite aus A Figuren mit weniger Spielsteinen (als A) ab!
   b) Unter Verminderung der Spielsteine ist eine gegebene Figur B aus A abzuleiten.
   c) Leite unter Verminderung der Spielsteine in einer vorgegebenen Anzahl von Umformungsschritten aus A Figuren ab.

Gib jeweils die verwendeten Transformationsregeln (auch bei den folgenden Aufgaben) an.

2. Unter Verminderung der Anzahl der Spielsteine ist aus einer gegebenen Figur A eine Figur B abzuleiten.

Nun werden die zur Ableitung benötigten Zwischenfiguren beseitigt, so daß nunmehr die Figuren A und B erhalten bleiben. Leite (durch Vermehrung der Zahl der Spielsteine) die Figur A aus B ab!

In die folgenden Aufgaben kann ein Element des Wettbewerbs hineingetragen werden, indem die Lösungen in naheliegender Weise mit Punkten bewertet werden.

3. Leite aus einer Figur A mit möglichst wenigen Zwischenfiguren eine Figur B ab. Bei jedem Umformungsschritt darf genau eine Regel benutzt werden.

In einer ersten Phase kann man bei der Lösung dieser Aufgabe natürlich gestatten, die A mit B verbindenden Figurenketten wirklich herzustellen und daraus diejenige mit den wenigsten Zwischenfiguren auszuwählen. Anspruchsvoller gestaltet sich die Lösung, wenn die Ableitungsschritte in einer zweiten Phase gedanklich vorgeplant werden müssen.

4. Gegeben ist eine Figur auf zwei (drei) Tafeln. Vermindere (vermehre) die Zahl der Spielsteine indem a) zunächst nur Umformungen auf genau einer der Tafeln vorgenommen werden,
b) die Anzahl der auf der vorgeschriebenen Tafel ausgeführten Umformungen - die zu verschiedenen Figuren führen - soll möglichst groß sein.

5. Stelle aus einer gegebenen Figur sämtliche möglichen Figuren her.

Die bei dieser Aufgabe auftretende Lösungsvielfalt kann eingeschränkt werden, indem zusätzliche Nebenbedingungen gefordert werden: Anzahl und (oder) Art der belegten Felder, Teilfiguren der abzuleitenden Endfiguren.

Die zweite Aufgabe setzt den Akzent auf die Reversibilität von Handlungen. Die dritte Aufgabe spricht speziell das Umwegdenken an. Bei der 4. Aufgabe kommt es auf möglichst geschickte Umformungen auf der vorgeschriebenen Tafel an, wobei u.a. die Anwendung der Regel 2 (oder eine ihrer Varianten) eine Rolle spielt. Nachdem in der 5. Aufgabe keine bestimmten Endfiguren vorgeschrieben sind, zielt diese Problemstellung auf divergentes Denken ab.
Bei den bisherigen Übungen zum syntaktischen Beweisen stand der figu-

rale Aspekt des Minicomputers im Vordergrund. Aber auch unter arithmetischen Gesichtspunkten sind Ableitbarkeitsbeweise am Minicomputer lehrreich. Zunächst fördern die figuralen Übungen die Einprägung der Übergangsregeln, so daß durch die Vorwegnahme des für das spätere Rechnen rein "technischen" Teils der Figurenumformung ein größerer Spielraum für die Behandlung arithmetischer Probleme zur Verfügung ist. Die arithmetische Deutung des Minicomputers erlaubt eine arithmetische Interpretation der bisherigen Handlungen. Schließlich gestattet die sukzessive Behandlung des figuralen und des arithmetischen Aspekts des Minicomputers eine Synthese im übergreifenden Aspekt des arithmetischen Entscheidungsverfahrens. In der Tat kann die Ableitbarkeit von Figuren aus gegebenen, alleine aufgrund arithmetischer Überlegungen entschieden werden.
Schließlich sei noch auf die im Regelsystem R steckende arithmetische Variante des Minicomputers verwiesen. Während dieser auf ein Duo-Dezimalsystem angelegt ist, gestattet R die Abwandlung zu einem Tri-Dezimalsystem.

d) Kalkülspiele mit semantischem Hintergrund

Bei den protologischen Spielen mit linearer Figurenanordnung stand ausschließlich der Aspekt des syntaktischen Operierens im Mittelpunkt des Interesses. Durch die arithmetische Interpretationsmöglichkeit der syntaktischen Umformungen auf dem Minicomputer kamen über den Begriff des Entscheidungsverfahrens semantische Aspekte ins Spiel. Nunmehr betrachten wir Spiele, deren syntaktische Elemente in einem sehr anschaulichen Rahmen interpretiert sind. Es handelt sich um die Deutung gewisser Kalküle als Symmetriegruppen geometrischer Objekte. Umgekehrt kann auch jede endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ und Relationensystem S als Kalkül [1] interpretiert werden.
Für die weiteren Ausführungen sei vorausgesetzt, daß die Formulierung von Regelsystemen jeweils auf der sechsten Stufe eines Dieneschen "six étapes" - Lernzyklus erfolgt. In einem ersten Spiel beschäftigen sich die Kinder mit der Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks.

---

1 bzw. als Thue-System

Bezeichnet man Rechts-Linksdrehung um 120° bzw. die Achsenspiegelung mit r, l bzw. s und die neutrale Operation mit e, so sollen in einer ersten Aufgabe, die an Schülergruppen gestellt wird, Ersetzungsregeln gefunden werden.
Durch die Konkurrenz der Vertreter verschiedener Regeln (Regelsysteme) stellt sich auf natürliche Weise die Frage nach deren Gleichwertigkeit, d.h. Eliminierbarkeit.

Beispiel. Es wurden folgende Regeln (R) gefunden:

1. $ll \longleftrightarrow r$

2. $lr \longleftrightarrow e$

3. $le \longleftrightarrow l$

Eine andere Gruppe hat u.a. die Regel

4. $rr \longleftrightarrow l$ entdeckt.

Aufgabe. Ist 4. eine grundsätzlich neue Regel, oder kann man sie durch R ausdrücken? Präziser: Ist 4. bezüglich R zulässig?

In der Tat[1]:

$$rr \overset{4.}{\longleftrightarrow} llr \overset{2.}{\longleftrightarrow} le \overset{3.}{\longleftrightarrow} l$$

Aufgabe. Verkürze unter Anwendung der Regeln 1. - 4. die folgenden "Wörter" [2]:

lll, rrr, llll, rrrr, ... rlllrl, lrrll etc.
Überprüfe die Resultate am Modell.

Aufgabe. Wähle Wörter der Länge 1 (2,...). Verlängere unter Anwendung der Regeln 1. - 4. zu Wörtern mit maximaler vorgegebener Länge.

Aufgabe. Leite aus vorgegebenen Wörtern alle Wörter einer festen Länge ab.

---

1 Die Assoziativität der Zeichenverknüpfung ergibt sich aus der Assoziativität der zugrunde liegenden effektiven Handlungen.

2 Die Einführung des Begriffes 'Wort' über dem Alphabet $\{e, l, r, s\}$ liegt nahe. Unter der Länge eines Wortes versteht man die Anzahl der Buchstaben des Wortes.

Aufgabe. Zeige die Zulässigkeiten folgender Regeln bzgl. 1. - 4.

a) $lll \longleftrightarrow e$ b) $rrr \longleftrightarrow e$ c) $el \longleftrightarrow l$ d) $rl \longleftrightarrow e$
e) $ee \longleftrightarrow e$ f) $eee \longleftrightarrow e$

Neu gewonnene Informationen hinsichtlich gewisser Zulässigkeiten sind zu verwenden.

Der Übergang von der Drehgruppe des gleichseitigen Dreiecks zur vollen Symmetriegruppe ist mit einer Anreicherung der bisherigen Regelsysteme verbunden, da als weiteres erzeugendes Element die Spiegelung an den Symmetrieachsen hinzukommt.
Wir erhalten das Regelsystem R' wenn zu 1. - 4. die Regeln

5. $ss \longleftrightarrow e$
6. $ls \longleftrightarrow sr$

adjungiert werden [1].
Nun können die oben angegebenen Aufgaben sinngemäß auf das Regelsystem R' übertragen werden.

Folgt man der bei Dienes angegebenen Formalisierung der Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks, so ergibt sich folgendes Regelsystem R'' :

1. $bb \longleftrightarrow e$ "e" entspricht der neutralen Operation.
2. $ggg \longleftrightarrow e$
3. $gbg \longleftrightarrow b$

Für den Unterricht empfiehlt sich die Erarbeitung beider Regelsysteme R', R'' da über ihren Vergleich interessante Fragestellungen aufgeworfen werden können.
Da R', R'' die gleichen konkreten Modelle beschreiben, stellt sich das Problem nach der "Gleichwertigkeit" (Äquivalenz) der beiden Formalisierungen.
R' bzw. R'' ist über dem Alphabet $\{l, r, s, e\}$ bzw. $\{b, g, e\}$ formuliert.
Um die Systeme R', R'' miteinander vergleichen zu können, müssen sie in dieselbe "Sprache" übersetzt werden.

---

1 Die Regel 4. ist natürlich entbehrlich.

Aufgabe. Gib eine Übersetzungsvorschrift für die beiden Alphabete an.

Da beide Alphabete von verschiedener Mächtigkeit sind, kann eine buchstabenweise Zuordnung nicht zum Ziel führen. Im Unterricht kann diese Schwierigkeit umgangen werden, wenn man bei den Kindern die Bedeutungen der Symbole in Erinnerung ruft.

Angenommen, es wird folgende Übersetzungsvorschrift (Ü) konstruiert:

R' e s l r

R'' e b g gg

Aufgabe. Übersetze unter Anwendung von Ü die Systeme R' bzw. R'' in Systeme $R'_{ü}$ bzw. $R''_{ü}$

Anknüpfend an die einleitende Untersuchung der Zulässigkeit von 4. bzgl. R ergibt sich die Definition:

R' heißt gleichwertig mit R'', wenn alle Regeln von $R''_{ü}$ zulässig bzgl. R' sind (bzw. wenn alle Regeln von $R'_{ü}$ zulässig bzgl. R'' sind).

Aufgabe. Zeige die Gleichwertigkeit von R' mit R''.

Die weiteren Aufgaben sollen einmal unmittelbar und auf einem zweiten Weg nach Übersetzung gelöst werden.

Aufgabe. In R'' sind die Regeln bggb$\longleftrightarrow$g und bgb$\longleftrightarrow$gg zulässig.

Beispiel. Übersetzung von bggb liefert slls

$$\text{slls} \overset{1.}{\longleftrightarrow} \text{srs} \overset{6.}{\longleftrightarrow} \text{lss} \overset{5.}{\longleftrightarrow} \text{le} \overset{3.}{\longleftrightarrow} \text{l}$$

Übersetzung von l liefert g.

Aufgabe. Zeige die Eliminierbarkeit der Regel 1. in R''.

Die erörterten Probleme lassen sich sinngemäß auf die Dreh- bzw. Symmetriegruppen von Quadrat, Würfel und Tetraeder übertragen. Zur Erarbeitung in der enaktiven und ikonischen Repräsentationsstufe vgl. Dienes (1969, 1971).

Allerdings nehmen die Regelsysteme umso kompliziertere Formen an, je reichhaltiger die Symmetrien werden, so daß für die Zwecke des syntaktischen Ableitens von Fall zu Fall abzuwägen ist, ob der technische Aufwand in angemessenem Verhältnis zu den jeweils verfolgten Absichten steht. M.E. ist für Schüler die Symmetriegruppe des Qua-

drats unter syntaktischen Aspekten noch gut zu überblicken, während die Verhältnisse bei den Gruppen räumlicher Objekte ziemlich unübersichtlich werden.

3. Kapitel

Die instrumentale Funktion logischer Konnektoren

1. Einleitung und Übersicht

Im Zentrum der Untersuchungen des vorliegenden Kapitels stehen didaktische Probleme logischer Konnektoren. Mehrfach wurden logische Konnektoren bereits in den Abschnitten über die Präfiguration des syntaktischen Folgerungsbegriffs verwendet; allerdings auf völlig naiver Weise. Obwohl sich also von dieser Seite her Ansatzpunkte für die Untersuchung logischer Konnektoren ergeben hätten, schien es aus Gründen der Übersichtlichkeit besser, diesem Thema ein eigenes Kapitel vorzubehalten. In der Unterrichtspraxis sollte man jedoch gegenüber der hier aus systematischen Gründen vollzogenen Trennung der Inhalte einer integrierten Behandlung - ganz im Sinne der inhaltlichen Logik - den Vorzug einräumen.

Die im 1. Kapitel durchgeführte kritische Analyse der gegenwärtig üblichen, nach neueren Curriculumvorstellungen noch in verstärktem Maße zu übenden Praxis der mengentheoretisch-logizistisch orientierten Einführung logischer Konnektoren, kann aufgefaßt werden als didaktische Kritik an der Semantik logischer Partikeln. Die neuen Vorschläge zur logischen Durchdringung des Mathematikunterrichts orientieren sich m.E. einseitig an der naturgemäß formale Aspekte betonenden Fachstruktur der theoretischen Logik, in deren Rahmen allerdings das Arbeiten z.B. mit Wahrheitsfunktionen bzw. Wahrheitstafeln etwa bei Entscheidungsproblemen eine sinnvolle und gleichermaßen nützliche Funktion erfüllt. Es sei hier nur am Rande erwähnt, daß innerhalb der formalen Logik die vielfältigsten Beziehungen zwischen Wahrheitsfunktionen und anderen wichtigen Themen hergestellt werden können, so daß der Bereich "Wahrheitsfunktionen, Interpretation logischer Quantoren" in das Gesamtgebiet der theoretischen Logik voll und beziehungshaltig integriert ist. Die zu den Elementen der Aussagen- und Prädikatenlogik gehörende Lernstruktur wird nun durch Herunterprojizieren eines winzigen Ausschnittes[1] der logischen Fachstruktur auf das Niveau der Schule gewonnen.

---

1 Semantik der Junktoren und Quantoren.

Diese "didaktische" Transformation zerstört - um in diesem Bilde zu bleiben - einerseits die in der theoretischen Logik gegebene Beziehungshaltigkeit und läßt andererseits m.E. keine sinnvolle Integration in den für den Unterricht relevanten Kontext zu, wie im folgenden gezeigt werden soll. Die neuen Unterrichtsempfehlungen für Mathematik sehen eine intensive mengentheoretisch-logizistische Schulung im 8. und 11. Schuljahr vor. Außer für Zwecke der (axiomatischen) Formalisierung sowie einer wissenschaftlichen Durchdringung der Gleichungslehre werden keine weiteren innermathematischen Anwendungsmöglichkeiten des entwickelten logischen "Apparats" aufgezeigt. Es muß daher der Eindruck entstehen, daß logische Schulung zu einem wie auch immer gearteten Selbstzweck betrieben wird. Geht man davon aus, daß es kaum sinnvoll sein dürfte, die logische Schulung noch stärker theoretisch auszurichten, so zeigen die bisherigen Überlegungen die didaktische Notwendigkeit einer innigen Verflechtung zwischen logischen und mathematischen Inhalten.

In der folgenden Vorbeschreibung sollen die grundlegenden Ideen zur Realisierung dieser Verflechtung kurz angesprochen werden. Der zentrale Punkt ist dabei die Herstellung einer Verbindung zwischen logischen Konnektoren und inhaltlichen v.a. mathematischen Aktivitäten (z.B. Beweis-Handlungen).

Die Analyse einer der Unterrichtspraxis entnommenen mathematischen Aufgabe zeigt die Abhängigkeit der zur Lösung der Aufgabe erforderlichen Aktivitäten von der logischen Struktur des Problems. Handelt es sich z.B. um den Beweis einer logisch zusammengesetzten Aussage, so bestimmen die darin vorkommenden logischen Konnektoren ein gewisses Beweishandlungsschema[1]. Ist diese Abhängigkeit einmal erkannt, so stellt sich die didaktische Aufgabe, die Bedeutung logischer Konnektoren so zu definieren, daß der Lernende die den logischen Zeichen zugeordneten Handlungsschemata in konkreten Handlungen (z.B. Beweishandlungen) aktualisieren und somit dem operativen Sinn dieser Zeichen gemäß verfahren kann. M.a.W.: Die logischen Zeichen sollen

---

1 Soll z.B. Allaussage $\bigwedge_t a(t)$ bewiesen werden, so beginnt der Beweis üblicherweise mit: "Sei t beliebig aber fest gewählt ... dann gilt $a(t)$ ... also gilt $a(t)$." Schlüsse dieser Art können mit der gegenwärtig verwendeten prädikatenlogischen Interpretation kaum durchsichtig und einsichtig gemacht werden, so daß Schüler zur Kopie vorfabrizierter Schlußweisen verleitet werden. Wichtig wäre hier die Förderung des Verständnisses derartiger Beweisschemata.

auf den Lernenden - als Empfänger - wirken und ihn zu bestimmten Handlungen auffordern; kommt er diesen Aufforderungen nach, so wendet er die logischen Konnektoren inhaltlich an und sie erfüllen damit eine instrumentale Funktion für die Lösung eines inhaltlichen Problems. Insgesamt ergibt sich daher eine enge Verzahnung zwischen semantischer und pragmatischer Dimension (Funktion) logischer Zeichen einerseits und dem mathematischen Lernprozeß andererseits. Ein weiterer wichtiger Punkt, den die Aufgabenanalyse zutage bringt, betrifft die syntaktische Dimension logischer Zeichen, didaktisch gewendet: die Fähigkeit, logische Umformungen durchführen zu können[1]. Insgesamt kann man sagen, daß die instrumentale Funktion logischer Konnektoren die didaktische Grundlage für ihre Einbeziehung in den Mathematikunterricht abgibt. Ein wichtiges didaktisches Problem ist es daher, Möglichkeiten für die Verbindung logischer Zeichen mit beispielsweise mathematischen Aktivitäten aufzuzeigen.

Mit dieser Frage - wenn auch unter anderer Akzentuierung - befaßte sich auch der Brouwersche Intuitionismus, der allgemein eine engere Verbindung zwischen Logik und Mathematik erbrachte und den Anstoß zur Entwicklung sog. Kalküle des "natürlichen" Schließens (G.Gentzen) gab. Die Kolmogorovsche Aufgabelogik ebenso wie jene Logik-Kalküle sollten den mathematischen Schlußprozeß[2] möglichst genau modellieren. Obwohl diese Systeme, ebenso wie E. Beths semantische Tableaus den instrumentalen Aspekt logischer Konnektoren besonders betonen, wird ihre Analyse erbringen, daß sie erstens die unter didaktischen Gesichtspunkten wichtige pragmatische Dimension zu wenig akzentuieren und zweitens keine der mathematischen Unterrichtssituation angemessene Semantik des Allquantors anbieten.

Pointiert kommt dagegen die pragmatische Dimension logischer Konnektoren in ihrer auf P. Lorenzen zurückgehenden dialogischen Interpretation zum Ausdruck, die hier mit gewissen pragmatischen Elementen der Aufgabenlogik (gewissermaßen zu einer dialogischen Aufgabenlogik) verbunden wird. Die dialogische Interpretation ordnet den logischen Zeichen dialogische Handlungsschemata zu, wobei freilich mehr das Gewicht auf einer Verinnerlichung der dialogischen Situation in der

---

1 Z.B. die Übergänge $\neg \bigwedge_x a(x) \longleftrightarrow \bigvee_x \neg a(x)$, $\neg(a \vee b) \longleftrightarrow \neg a \wedge \neg b$, beherrschen.

2 In seiner Struktur nicht jedoch in seinem tatsächlichen Ablauf.

Person des Problemlösers liegt[1], statt auf einer echten dialogischen Rollenverteilung.

Ein didaktischer Vorzug der dialogischen Interpretation logischer Konnektoren besteht darin, daß sie einen natürlichen Zugang zu den von H.-J. Vollrath vorgeschlagenen dialogischen Beweisverfahren eröffnet, mit denen im Unterricht der Beweis als Gewinnstrategie eines Dialogs motiviert werden soll. In der vorliegenden Untersuchung wird statt des Motivationsaspekts stärker der logische Aspekt dieser Verfahren betont. Deutet man nämlich den konventionellen Beweis als verinnerlichten Dialog, so läßt sich der Begriff der Gewinnstrategie auch für diese Situation fruchtbar machen. Vor allem erlaubt die dialogische Interpretation des Allquantors zusammen mit dem Begriff der Gewinnstrategie eine didaktisch befriedigende Semantik dieses Konnektors.

Wie H.-J. Vollrath gezeigt hat, läßt sich der dialogische Beweis schon sehr früh in den Algebraunterricht einbringen. Im vorliegenden Kapitel werden Möglichkeiten zur Präfiguration des (Beweis-) Strategiebegriffs in Verbindung mit der Arithmetik aufgezeigt. Den Hintergrund dieser Ausführungen bildet die griechische Psephoi-Arithmetik; sie ermöglicht die enaktive Aktualisierung der zu den Konnektoren gehörenden dialogischen Handlungsschemata. Eine wichtige Rolle spielen in dem Zusammenhang die von Vollrath angegebenen auf den Beweis von Allaussagen bezogenen Differenzierungsmöglichkeiten.

Das Beispielmaterial zur Einübung und Anwendung logischer Handlungsschemata entstammt den verschiedensten Bereichen und soll andeuten, daß inhaltlich logische Schulung im Unterricht auf breiter, fächerübergreifender Basis möglich ist. In einem Ausblick werden schließlich auf dem Prinzip der "abstraction réfléchissante" beruhende Ansätze zur Begründung eines Logikkalküls angedeutet.

Neben dieser in die theoretische Richtung der formalen Logik abzielende Fortsetzungsmöglichkeit kann die im 3. Kapitel erörterte Thematik unter dem Aspekt der logischen Argumentation in einer mehr informellen Richtung vertieft werden.

---

1 Letztlich möchte man ja auf konventionelle Aufgabenlösungen (bzw. den konventionellen Beweis) hinaus.

Auf die Verbindung zwischen Logik und allgemeiner, d.h. nicht notwendig deduktiver Argumentation wurde in der didaktischen und philosophischen Literatur mehrfach verwiesen. H. Winter formuliert z.B. das allgemeine Lernziel Argumentationsfähigkeit und deutet die möglicherweise positive Auswirkung dialogischer Verfahren auf das Argumentationsverhalten an; die Autoren der Logischen Propädeutik[1] geben ihrem Buch den Untertitel "Vorschule des vernünftigen Redens" und entwickeln Logik als Theorie des kritischen Argumentierens.

---

1 P. Lorenzen, W. Kamlah (1967)

2. Problemstellung anhand der Analyse einer Aufgabe

Die Verbindung zwischen logischer Struktur und Handlungsstruktur soll an der Lösung der folgenden Aufgabe A demonstriert werden: "Beweise oder widerlege: die Funktion $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = x^2$ ist bijektiv."
Zur Lösung von A bieten sich zwei Wege an: entweder wendet man auf die gegebene Funktion ein für die Identifizierung des Merkmals "bijektiv" hinreichendes Kriterium - einen Lehrsatz - an, oder man versucht, das Merkmal aufgrund seiner Definition zu identifizieren. Bei der Lösung komplexer Aufgaben gelangen häufig beide Wege nebeneinander zur Anwendung. Die weiteren Ausführungen sind in beiden Situationen anwendbar; wir verfolgen den zweiten Weg.

Definition (D) : Eine Abbildung $f: U \longrightarrow V$ heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.
Erfahrungsgemäß sind Schüler vielfach in der Lage, derlei Regeln verbal zu reproduzieren, ohne sie jedoch in konkreten Situationen anwenden zu können. Das mag zum Teil daran liegen, daß sich der Lernende nicht hinreichend klar ist über den instrumentalen Status von Lehrsätzen und Definitionen. Lehrsätze und Definitionen sind Instrumente im mathematischen Problemlösungsprozeß[1]. Eine Definition anzuwenden kann heißen, sich darüber Klarheit zu verschaffen, was bewiesen werden soll[2]. Definitionen bzw. Lehrsätze enthalten aber noch weitere wichtige Informationen; ihre logische Struktur bestimmt die Struktur von Beweishandlungen. Die logische Struktur des Definiens bestimmt z.B. die Struktur der Handlungen, die zur Identifizierung des im Definiendum erklärten Merkmals erforderlich sind. Allgemein kann man sagen, daß die logische Struktur von Definitionen und Sätzen die Struktur von Beweis- bzw. Identifizierungsschemata festlegt.
Kehren wir zur o.g. Aufgabe zurück! Das Beweisschema zum Nachweis der Bijektivität von f gliedert sich wegen der konjunktiv verbundenen Merkmale "injektiv", "surjektiv" notwendig in zwei Abschnitte: 1. Nachweis der Injektivität von f, 2. Nachweis der Surjektivität von f[3]. Diesem Beweisschema ist natürlich nicht zu entnehmen, wie

---

1 Sie müssen darin - sehr allgemein ausgedrückt - angewendet werden.

2 Natürlich ist auch eine Iteration der Anwendung von Sätzen und Definitionen möglich.

3 Es kommt selbstverständlich nicht auf die Reihenfolge der Abschnitte an.

die Teilbeweise inhaltlich zu führen sind.
Wir wollen annehmen, der Aufgabenlöser möge zu der Vermutung neigen, f sei nicht bijektiv. Gleichbedeutend damit ist, daß der Aufgabenlöser die Aussage " $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = x^2$ ist bijektiv" zu widerlegen bzw. " $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = x^2$ ist nicht bijektiv" zu beweisen sucht. In beiden Fällen ist zunächst eine logische Umformung, nämlich die Negation der o.g. Definition durchzuführen. Es ergibt sich: Eine Abbildung $f : U \longrightarrow V$ ist nicht bijektiv genau dann, wenn f nicht injektiv oder nicht surjektiv ist. Da nun die entscheidenden Merkmale "nicht injektiv", "nicht surjektiv" disjunktiv verknüpft sind, erhält man als Beweis-(Widerlegungs-) Schema das Schema der Fallunterscheidung. Mindestens eine der beiden Aussagen "f ist injektiv", "f ist surjektiv" ("f ist nicht injektiv", "f ist nicht surjektiv") muß widerlegt (bewiesen) werden[1]. Ist von vorneherein nicht abzusehen, bei welcher Aussage die Widerlegung gelingt, bzw. führt die Widerlegung der zuerst gewählten Aussage nicht zum Ziel, so ergibt sich eine "echte" Fallunterscheidung. Gelingt die Widerlegung bereits für die zuerst gewählte Aussage, so ist eine Fallunterscheidung natürlich überflüssig. In unserem Beispiel kann die Aussage "f ist surjektiv" bewiesen, "f ist injektiv" widerlegt werden. Der Beweis bzw. die Widerlegung der betreffenden Aussagen möge durch Zurückgehen auf die Definitionen geschehen.

S: Eine Abbildung $f : U \longrightarrow V$ heißt surjektiv, wenn gilt:

$$\bigwedge_{y \in V} \bigvee_{x \in U} f(x) = y$$

I: Eine Abbildung $f : U \longrightarrow V$ heißt injektiv, wenn gilt:

$$\bigwedge_{x \in U} \bigwedge_{y \in U} f(x) = f(y) \longrightarrow x = y$$

Solange der Lernende nicht den Zusammenhang zwischen der quantifizierten Struktur von S und der Wendung "zu beliebigem aber festem $y \in V$ gibt es ein $x \in U$ mit $f(x) = y$ durchschaut, wird dieser Ausdruck für ihn eine bedeutungslose,und aus diesem Grund gedankenlos zu kopierende, Floskel sein. Anders dagegen, wenn er den Allquantor mit der Aufforderung zum Suchen einer Beweisstrategie assoziiert, die ihm zu vorgegebenem $y \in V$ ein die Gleichung $f(x) = y$ erfüllendes x liefert.

---

1 Operative Deutung der Negation $\neg$ a : Widerlege a !

Die Widerlegung von " f ist injektiv " erfordert zunächst die Negation des entsprechenden Definiendums; dann erhält man

$\bigvee_{x\in\mathcal{U}} \bigvee_{y\in\mathcal{U}} \neg(f(x)=f(y)\longrightarrow x=y)$ bzw. $\bigvee_{x\in\mathcal{U}} \bigvee_{y\in\mathcal{U}} f(x)=f(y)\wedge x\neq y$

Inhaltlich gedeutet fordern die beiden Existenzquantoren zur Angabe zweier spezieller Werte $x = x_0$, $y = y_0$ auf, welche die Aussage $f(x_0)=f(y_0)\longrightarrow x_0=y_0$ widerlegen und somit als Gegenbeispiel zur Widerlegung der Aussage $\bigwedge_{x\in\mathcal{U}} \bigwedge_{y\in\mathcal{U}} f(x)=f(y)\longrightarrow x=y$ fungieren.

Insgesamt ergibt sich das Bild einer engen Verflechtung zwischen der logischen Struktur von Aussagen und Definitionen mit den zum Beweis erforderlichen inhaltlichen Aktivitäten. Definitionen müssen dynamisch verstanden werden: sie zeigen - in Abhängigkeit von ihrer logischen Struktur - was bewiesen werden muß. Das Erkennen der logischen Struktur und das Vermögen,ihr entsprechende Beweisschemata anzulegen, sind notwendige Voraussetzungen für die erfolgreiche Bearbeitung logisch zusammengesetzter Aufgaben. Insbesondere kommt es darauf an, die logischen Partikeln mit Handlungsaufforderungen zu assoziieren.

Beispiele: mit $a\wedge b$, $a\vee b$, $\neg a$, $\bigwedge_x a(x)$ sind die Aufforderungen zu verbinden "die Aussagen a und b beweisen (beide Aussagen a , b beweisen)", "mindestens eine der Aussagen a , b beweisen", "die Aussage a widerlegen", "eine Beweisstrategie für a (x) bei beliebig vorgegebenen x finden".

Ein weiterer wichtiger Punkt, der sich aus der Analyse ergibt, ist die Notwendigkeit der Kenntnis logischer Umformungsregeln wie:

$\neg(a\wedge b)$ äquiv. $\neg a\vee\neg b$, $\neg\bigwedge_x a(x)$ äquiv. $\bigvee_x\neg a(x)$

$\neg(a\rightarrow b)$ äquiv. $a\wedge\neg b$. Für den Aufgabenlösungsprozeß ist zunächst nur die Beherrschung der logischen Umformungs-Technik (speziell die Negation) von Bedeutung. Die Umformungsregeln lassen sich leicht aus sog. Beweisrahmen ableiten, wenn man das tertium non datur akzeptiert (vgl. S.144).

3.a) Der instrumentale Aspekt der Logikkalküle von E. Beth, G. Gentzen und N. Kolmogorov

Mit der instrumentalen Funktion logischer Konnektoren, die im letzten Abschnitt an einem Beispiel aufgezeigt worden ist, haben sich zuerst Arbeiten von E. Beth, G. Gentzen und N. Kolmogorov beschäftigt, auf die im folgenden eingegangen wird.

Seit den Anfängen der symbolischen Logik ist eine zunehmende Verselbständigung dieser Disziplin festzustellen. Das bedeutet vor allem, daß das einstmalige Ziel der formalen Beschreibung des "richtigen" Denkens zugunsten strukturell orientierter Untersuchungen innerhalb der Logik in den Hintergrund getreten ist. Erst Brouwers Intuitionismus sorgte wieder für eine engere Verflechtung zwischen Mathematik und Logik. Logik ist nach intuitionistischer Auffassung ein Ergebnis mathematischer Aktivität und geht nicht der Mathematik voraus[1].

Ein logisches Gesetz wird als Deduktionsregel verstanden, die von Mathematikern akzeptiert worden ist. Ehe eine solche Regel nicht angewendet wird, gibt es keinen Grund, sie als logisches Gesetz zu akzeptieren. Schließlich läßt der Intuitionismus nur gewisse logische Schlüsse gelten, was auf der Annahme beruht, daß ein Mathematiker auch nur gewisse geistige Konstruktionen ausführen kann.

Die Kluft zwischen logistischen Systemen, denen lediglich innerhalb der theoretischen Logik Bedeutung zukommt, und den in Mathematik und anderen exakten Wissenschaften tatsächlich zur Anwendung gelangenden logischen Schlüssen, versuchte G. Gentzen in seinem "Kalkül des natürlichen Schließens"[2] zu überwinden.

Im Vergleich theoretischer Logiksysteme mit dem in der wissenschaftlichen Praxis geübten logischen Schließen trifft Gentzen die Feststellung: "Die Formalisierung des logischen Schließens, wie sie insbesondere von Frege, Russel, Hilbert entwickelt worden ist, entfernt sich ziemlich weit von der Art des Schließens, wie sie in Wirklichkeit bei mathematischen Beweisen geübt wird."[3] Das hat seinen Grund

---

1 "Die Intelligenz gewinnt die Schlachten, in denen sie - wie die Dichtung - dauernd schöpferisch tätig ist, während die logistische Deduktion nur den strategischen Abhandlungen oder den "Regeln der Dichtkunst" vergleichbar ist, welche die vergangenen Siege des Handelns und des Denkens kodifizieren, nicht aber ihre zukünftigen Eroberungen sichern." L.Brunschvicg zit.n. J.Piaget (1966) S. 37

2 G. Gentzen (1934) S. 176

3 ebd.

darin, daß in jenen Systemen, im Gegensatz zum Kalkül des natürlichen Schließens (kurz: N-Kalkül) "die richtigen Formeln aus einer Reihe von logischen Grundformeln durch wenige Schlußfolgerungen hergeleitet werden; das natürliche Schließen geht jedoch im allgemeinen nicht von logischen Grundsätzen aus, sondern von Annahmen, an welche sich logische Schlüsse anschließen. Durch einen späteren Schluß wird dann das Ergebnis wieder von der Annahme unabhängig gemacht." [1]
Diese Ausführungen Gentzens spiegeln deutlich die vom Intuitionismus geforderte Verbindung zwischen Logik und (mathematischen) Inhalt wieder. Der inhaltliche Aspekt kommt darin zum Ausdruck, daß der N-Kalkül den jeweils fachspezifischen Annahmen Rechnung trägt und diese an den Anfang logischer Deduktionen stellt. Ausdrücklich betont Gentzen ferner die instrumentale Funktion der Logik beim mathematischen Beweis, was auf ein dynamisches Verständnis der Logik als "Logik in der mathematischen Aktion" schließen läßt.
Während die Logiksysteme von Frege, Russel und Hilbert Axiome und Deduktionsregeln enthalten, besteht der N-Kalkül Gentzens nur aus Schlußregeln.
Jede Schlußregel läßt sich als eine sog. Schlußfigur darstellen, die aus einer oder mehreren Oberformeln, einem Schlußstrich und einer Unterformel besteht.

Schematisch: $\frac{A_1, \ldots, A_m}{B} \quad m \geq 1$

Den Schlußstrich kann man (metasprachlich) als Ausdruck des Imperativs deuten "gehe von der Oberformel (n) zur Unterformel über."
Formeln, die nicht Unterformeln einer Schlußfigur sind, heißen Anfangsformeln der Herleitung. Eine Schlußfigur besagt, daß man von der Gültigkeit der über dem Schlußstrich stehenden Oberformeln - etwa den Axiomen oder Sätzen einer mathematischen Theorie - auf die Gültigkeit der Unterformel schließen darf. Zu jedem logischen Konnektor gehört eine "Einführungs"- und eine "Beseitigungsregel". In der Einführungsregel wird der Konnektor definiert, während beide Regeln zusammen seinen Gebrauch, seine Verwendung, festlegen.
In der folgenden Tabelle sind die von Gentzen ausgegebenen Schlußregeln zusammengestellt. Anschließend werden die Schlußfiguren erläutert.

---

1 a.a.O. S. 184, Hervorhebung vom Verf.

	Einführungsregel E - Regel	Beseitigungsregel B - Regel
1.	$\dfrac{A\ ,\ B}{A \wedge B}$	$\dfrac{A \wedge B}{A}\ ,\ \dfrac{A \wedge B}{B}$
2.	$\dfrac{A}{A \vee B}\ ,\ \dfrac{B}{A \vee B}$	$\dfrac{A \vee B\ ,\ \overset{[A]}{C}\ ,\ \overset{[B]}{C}}{C}$
3.	$\dfrac{\overset{[A]}{B}}{A \longrightarrow B}$	$\dfrac{A,\ A \longrightarrow B}{B}$
4.	$\dfrac{\overset{[A]}{\lambda}}{\neg A}$	$\dfrac{A\ ,\ \neg A}{B}$
5.	$\dfrac{A(a)}{\bigwedge\limits_x A(x)}$	$\dfrac{\bigwedge\limits_x A(x)}{A(a)}$
6.	$\dfrac{A(a)}{\bigvee\limits_x A(x)}$	$\dfrac{\bigvee\limits_x A(x)\ ,\ \overset{[A(a)]}{B}}{B}$

Über die Bedeutung der in eckigen Klammern stehenden Zeichen sagt Gentzen: "Formeln dieser Gestalt dürfen in beliebiger Anzahl (eventuell keine) ... der Schlußfigur als Annahmeformeln zugeordnet sein." Die inhaltliche Deutung der Schlußfiguren liefert:

1 E : Um $A \wedge B$ herzuleiten, ist sowohl A als auch B herzuleiten.

1 B : Von $A \wedge B$ kann umgekehrt auf A bzw. B geschlossen werden.

2 E : Ist A bzw. B hergeleitet, dann auch $A \vee B$

2 B : Ist $A \vee B$ bewiesen, so kann eine Fallunterscheidung gemacht werden. Man nimmt zunächst an, es gelte A und leitet daraus C her; läßt sich ferner aus der Annahme der Gültigkeit von B ebenfalls C herleiten, so gilt C und zwar unabhängig von den beiden Annahmen.
Die v-Beseitigungsregel modelliert somit die im praktischen Schließen häufig verwendete Fallunterscheidung.

3 E : Die ^{R}egel besagt, daß man $A \rightarrow B$ hergeleitet hat, wenn B unter der Annahme von A bewiesen worden ist.

3 B : Modus ponens.

4 E : Folgt aus einer Annahme etwas Falsches, ein Widerspruch "$\lightning$", so ist A nicht richtig und es gilt $\neg$ A.
Dieser Schluß wird beim indirekten Beweis angewandt.

4 B : Ex falso quodlibet.

Um in 5) und 6) Schwierigkeiten durch freie und gebundene Variablen zu vermeiden, muß noch die folgende Variablenbedingung festgelegt werden.
"Die Eigenvariable in 5 E darf nicht in der mit $\bigwedge_x A(x)$ bezeichneten Formel und nicht in irgendeiner Annahmeformel, von der diese abhängt, vorkommen; die Eigenvariable in 6 B darf nicht in der mit $\bigvee_x A(x)$ bezeichneten Formel und nicht in der mit C bezeichneten Oberformel sowie nicht in irgend einer Annahmeformel, von der diese abhängt, außer den mit A(a) bezeichneten, zu 6 B gehörigen Annahmeformeln, vorkommen."[1]

5 E : Gentzen erklärt diese Schlußfigur mit den Worten: "Wenn A(a) für "beliebiges a" bewiesen ist, so gilt $\bigwedge_x A(x)$. Die Voraussetzung, daß a "ganz beliebig" ist, läßt sich genauer so ausdrücken: A(a) darf von keiner Annahme abhängen, in welcher die Gegenstandsvariable a vorkommt."

5 B : Hier wird die Spezialisierung einer Allaussage ausgedrückt.

6 E : Diese Regel bedarf keiner Erläuterung.

6 B : Man hat: $\bigvee_x A(x)$; dann sagt man, a sei ein Individuum, für

---

1 G. Gentzen (1934) S. 186

das A(a) gilt. Wurde aufgrund dieser Annahme eine Aussage B bewiesen, die a nicht mehr enthält und auch nicht von einer sonstigen a enthaltenden Annahme abhängt, dann kann auf die Gültigkeit von B geschlossen werden.

Der N-Kalkül erweist sich, wie Gentzen zeigte, äquivalent zu der von Heyting formalisierten intuitionistischen Prädikatenlogik. Nimmt man als weitere Schlußregel eine zum "tertium non datur" äquivalente Form auf, etwa

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

, so ist das entstehende System äquivalent zur klassischen Prädikatenlogik.

Die folgenden Beispiele dienen zur Veranschaulichung einiger Schlußregeln.

1 E : Um zu beweisen,"die Funktion $f : U \longrightarrow V$ ist injektiv und surjektiv" muß gezeigt werden: "f ist injektiv" und "f ist surjektiv".

1 B : Ist bekannt, daß $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ bijektiv ist, so kann (unter Verwendung der Definition von "bijektiv") z.B. geschlossen werden "f ist surjektiv".

2 B : Es soll der Satz bewiesen werden: "Der Mittelpunktswinkel im Kreis ist doppelt so groß, wie ein Umfangswinkel über demselben Bogen." Mit M werde der Kreismittelpunkt mit A, B die Endpunkte der Sehne und mit P ein Punkt des Kreises bezeichnet. Mit int ABP, ext ABP bzw. rd ABP werde das (topologische) Innere, Äußere bzw. der Rand des Dreiecks ABP bezeichnet.
Für einen Beweis des Satzes geht man z.B. von der Annahme aus: $(M \in \text{int ABP}) \vee (M \in \text{rd ABP}) \vee (M \in \text{ext ABP})$ und zeigt für jeden Fall die Gültigkeit des Satzes. Das Endresultat ist dann natürlich unabhängig von diesen Annahmen.

4 E : Aus der Annahme „$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$; $p,q \in \mathbb{N}$ folgt der Widerspruch $(p,q) \neq 1$ Also gilt: $\sqrt{2}$ hat keine Darstellung der Form $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

5 E : Diese Schlußfigur wird beim Beweis jeder Allaussage (mit nicht endlichem Individuenbereich) angewandt. Mit ihr ist das sog. Locke - Berkeley - Problem verbunden, bei dem es um das sog. "allgemeine" Dreieck geht. Wir kommen unten im Zusammenhang mit den Bethschen Tableaus darauf noch zurück.

5 B : In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme 180 , also auch im speziellen Dreieck mit den Seitenlängen a = 3, b = 4, c = 5.

6 B : Hier wird im Grunde die Regel 2 B nachgeahmt und bringt daher nichts neues.

Wir wenden uns nun der von Kolmogorov vorgeschlagenen Interpretation der intuitionistischen Logik zu, über die A. Mostowski schreibt: "A very interesting interpretation was given by Kolmogorov, who interpreted the intuitionistic logic as the logic of problems. The connectives $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ are interpreted as operations of forming new problems out of given ones ... Intuitionistic identities built up by means of the connectives and the variables p, q, r ... will then represent schemata of problems which achieve solutions independently of the particular choice of p, q, r ... This interpretation is well in keeping with the intuitionistic conception that a mathematical theorem is always identical with a (theoretical) construction." [1]

Kolmogorovs instrumentale Intention der Aufgabenlogik kommt in den folgenden Sätzen zum Ausdruck: "Neben der theoretischen Logik, welche die Beweisschemata der theoretischen Wahrheiten systematisiert, kann man die Schemata der Lösungen von Aufgaben, z.B. von geometrischen Konstruktionsaufgaben, systematisieren. Dem Prinzip des Syllogismus entsprechend, tritt hier z.B. das folgende Prinzip auf: Wenn wir die Lösung von b auf die Lösung von a und die Lösung von c auf die Lösung von b zurückführen können, so können wir auch die Lösung von c auf die Lösung von a zurückführen."[2]

Bei Kolmogorov ist "Aufgabe" ein undefinierter Begriff, der jedoch durch Beispiele erläutert wird.

"Vier solche ganze Zahlen x, y, z, n finden, für welche die Relationen $x^n + y^n = z^n$ und $n > 2$ gelten."

"Durch drei Punkte einen Kreis ziehen."

"Vorausgesetzt, daß eine Wurzel der Gleichung $ax^2 + bx + c = o$ gegeben ist, die andere finden."

Den Umfangswinkelsatz beweisen.

---

1 A. Mostowski (1965) S. 13 f

2 N. Kolmogorov (1932) S. 58

Aus dem Kathetensatz algebraisch den Satz von Pythagoras herleiten.

Offensichtlich läßt sich jeder Aussage A die Aufgabe zuordnen "Beweise (widerlege) A". Stellt man sich auf den Standpunkt des Intuitionismus und hält sich nicht für allwissend - nämlich jede Aufgabe, und sei es durch Widerlegung, lösen zu können, so ist die Zuordnung zwischen Aussagen und Aufgaben nicht umkehrbar.
Ein wichtiger Aspekt des Kolmogorovschen Ansatzes ist die Dynamisierung des durch "wahr" oder "falsch" bedingten statischen Charakters von Aussagen durch den operativen Begriff der Aufgabe.
Vergleicht man das zweite Beispiel mit der Aussage "Zu je drei Punkten der Ebene in allgemeiner Lage gibt es einen, diese Punkte enthaltenden Kreis", so erkennt man in der Aufgabe deutlich den konstruktiven Zug, wirklich einen Kreis durch drei Punkte zu zeichnen, während die Aussage nicht unbedingt die Möglichkeit einer Konstruktion impliziert.
Zur Aufstellung des Aufgabenkalküls trifft Kolmogorov die folgenden Feststellungen. Sind a, b, c ... Aufgabenvariablen, so wird festgesetzt:

$a \wedge b$ bezeichnet die Aufgabe: "die Aufgabe a und die Aufgabe b lösen".

$a \vee b$ bezeichnet die Aufgabe: "mindestens eine der Aufgaben a und b lösen".

$a \longrightarrow b$ bezeichnet die Aufgabe: "vorausgesetzt, daß die Lösung von a gegeben ist, b lösen", damit ist gleichbedeutend "die Lösung von b auf die Lösung von a zurückführen."

$\neg a$ bezeichnet die Aufgabe: "vorausgesetzt, daß die Lösung von a gegeben ist, einen Widerspruch erhalten."

$\bigwedge_x a(x)$ Ist a(x) eine Aufgabe, deren Sinn vom Wert der Variablen x abhängt, so bezeichnet

$\bigwedge_x a(x)$ die Aufgabe: "eine allgemeine Methode für die Lösung von a(x) bei jedem einzelnen Wert von x anzugeben."

Nach diesen Vorbereitungen kann nunmehr der Aufgabenkalkül aufgebaut werden[1]:

---

1 Wir folgen hier der Darstellung von W.L. Fischer (1967).

I. Zeichenmenge:

1. Aufgabenvariable : a, b, c ...

2. Verknüpfungszeichen : $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\neg$, $\bigwedge$

3. Sonstige Variable : x, y ...

4. Klammern : ( )

II. Ausdrucksbestimmungen:

1. a, b, c ... sind zulässige Ausdrücke des Aufgabenkalküls

2. Mit a, b sind $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \longrightarrow b$, $\neg a$ zulässige Ausdrücke

3. Mit a ist auch $\bigwedge_x a(x)$ zulässig

4. Jede Zeichenreihe, die sich durch endliche Anwendung von II 1, 2, 3 gewinnen läßt, ist zulässig.

Die durch die Ausdrucksbestimmungen zulässigen Terme beschreiben Aufgabenfunktionen bzw. Aufgabenformeln p (a, b, ...).
Statt $\bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_c$ ... p (a, b, c ...) schreibt man kurz
$\vdash$ p (a, b, c ...), was bedeutet: eine allgemeine Methode anzugeben für die Lösung von p (a, b, c ...) bei jeder einzelnen Wahl der Aufgaben a, b, c ...."
Die elementare Aufgabenlogik beschäftigt sich damit, eine Methode für die Lösung von Aufgaben der Form $\vdash$ p (a, b, c ...) durch die mechanische Anwendung einiger einfacher Rechenregeln, anzugeben. Dazu muß jedoch die Lösung einiger "elementarer" Aufgaben schon bekannt sein, die in den Gruppen A und B der folgenden Satzbestimmungen zusammengefaßt sind.

III. Satzbestimmungen:

A. Liste der gelösten elementaren Aufgaben.

1. $\vdash a \longrightarrow a \wedge a$

2. $\vdash a \wedge b \longrightarrow b \wedge a$

3. $\vdash (a \longrightarrow b) \longrightarrow (a \wedge c \longrightarrow b \wedge c)$

4. $\vdash (a \longrightarrow b) \wedge (b \longrightarrow c) \longrightarrow (a \longrightarrow c)$

5. $\vdash b \longrightarrow (a \longrightarrow b)$

6. $\vdash a \wedge (a \longrightarrow b) \longrightarrow b$

7. $\vdash a \longrightarrow a \vee b$

8. $\vdash a \vee b \longrightarrow b \vee a$

9. $\vdash (a \longrightarrow c) \wedge (b \longrightarrow c) \longrightarrow ((a \vee b) \longrightarrow c)$

10. $\vdash \neg a \longrightarrow (a \longrightarrow b)$

11. $\vdash (a \longrightarrow b) \wedge (a \longrightarrow \neg b) \longrightarrow \neg a$

B. Für beliebige elementare Aufgabenformen p, q, r, s ... existiert eine allgemeine Methode der Lösung der folgenden Aufgaben:

1. Wenn $\vdash p \wedge q$ gelöst ist, $\vdash p$ zu lösen.

2. Wenn $\vdash p$ und $\vdash (p \longrightarrow q)$ gelöst ist, $\vdash q$ zu lösen.

3. Wenn $\vdash p(a, b, c \ldots)$ gelöst ist, $\vdash p(q, r, s \ldots)$ zu lösen.

Beispiel: A 3 kann unter Verwendung von B 1,2 wegen $b \wedge c \longrightarrow b$ umgeformt werden zu $\vdash (a \longrightarrow b) \longrightarrow (a \wedge c \longrightarrow b)$.
Dieses Schema kann bei Beweisaufgaben unter dem Gesichtspunkt der Verschärfung einer Voraussetzung, als Spezialisierung eines Satzes gedeutet werden. Daß sich z.B. in einem Quadrat (als Rhombus mit einem Paar senkrechter Seiten) die Diagonalen halbieren, ist ein Spezialfall des entsprechenden für den Rhombus geltenden geometrischen Satzes.
Zu A 4 : Der Beweis des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck soll auf den Satz des Pythagoras zurückgeführt werden. Gelingt es, den Höhensatz aus dem Kathetensatz und den Kathetensatz aus dem Satz von Pythagoras herzuleiten, so ist auch die ursprüngliche Aufgabe gelöst.

A 9 schematisiert die Methode der Fallunterscheidung
A 10 beschreibt eine Form des "ex falso quodlibet"
A 11 ist die Form "reductio ad absurdum"

Die Begründung des in der angelsächsischen Literatur unter der Bezeichnung "universal generalization" bekannten Schlußschemas $\frac{A(a)}{\bigwedge_x A(x)}$ (E 5) war Gegenstand zahlreicher philosophischer und logischer Untersuchungen. Das bekannte Locke - Berkeley - Problem ist eine der Spielarten der "universal generalization". E. Beth bediente sich zur Lösung dieses Problems einer neuen interessanten logischen Methode, mit der ihm auch die Begründung der elementaren Logik gelingt. Er schreibt: "Es ist mir neuerdings gelungen, einen semantisch begründeten Aufbau der elementaren Logik anzugeben, wel-

cher nicht nur an sich ganz gefällig aussieht, sondern auch unserer "natürlichen" Denkart sehr genau entspricht." [1]

Die Bemerkung Beths, welche die Widerspiegelung des natürlichen Denkens in den semantischen Tableaus betrifft, kann aus seinen philosophischen und erkenntnistheoretischen Neigungen[2] verstanden werden und interessiert besonders im Hinblick auf Gentzens N-Kalkül.

Zur Erläuterung von Beths Methode diene die elementare Aufgabe $\vdash a \wedge (a \longrightarrow b) \longrightarrow b$, die im Augenblick als Beziehungen zwischen Aussagen im klassischen Aussagenkalkül aufgefaßt wird. Bekanntlich kann mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Aussage "$a \wedge (a \longrightarrow b) \longrightarrow b$" als Tautologie identifiziert werden.

Das bei syntaktisch komplizierter aufgebauten Aussagen recht umständlich werdende Verfahren der Wahrheitstafeln kann in folgender Weise verkürzt werden. Statt sämtliche Interpretationen eines aussagenlogischen Ausdrucks zu untersuchen (was durch die Aufstellung der Wahrheitstafel bewirkt wird), kann umgekehrt gefragt werden, ob es eine Interpretation I gibt, die den betr. Ausdruck auf den Wahrheitswert "falsch" (f) abbildet.

Sei I eine derartige Interpretation, für die im Beispiel gilt $I(a \wedge (a \longrightarrow b) \longrightarrow b) = f$, dann ist der Wahrheitstafel für "$\longrightarrow$" bzw. "$\wedge$" zu entnehmen, daß dieser Fall genau dann eintreten kann, wenn $I(a \wedge (a \longrightarrow b) = W$, $I(b) = f$ und folglich $I(a) = W$, $I(a \longrightarrow b) = W$ ist. Da $I(a) = W$ und $I(a \longrightarrow b) = W$ müßte $I(b) = W$ im Widerspruch zu $I(b) = f$ sein.

E. Beth und unabhängig von ihm J. Hintikka benutzten dieses Verfahren zum Aufbau eines Prädikatenkalküls.

Nach dem Bethschen Tableau-Verfahren schreibt man in die rechte Spalte eines zweispaltigen Tableaus, das sich evtl. weiter aufspalten kann, alle Ausdrücke, die ungültig sein sollen, und in die linke Spalte alle gültigen. Soll bewiesen werden, daß ein Ausdruck eine Folgerung ist, so schreibt man ihn in die rechte Spalte. Für den Ausdruck $a \wedge (a \longrightarrow b) \longrightarrow b$ ergibt sich folgendes Tableau.

---

1 E. Beth (1956/57) S. 368

2 Vgl. E. Beth, J. Piaget (1966)

gültig	ungültig
$a \wedge (a \longrightarrow b)$	$a \wedge (a \longrightarrow b) \longrightarrow b$
a	b
$a \longrightarrow b$	
b	

Da in beiden Spalten b auftritt, wurde ein Widerspruch erzielt, das Tableau schließt. Dieser Sachverhalt wird durch zwei waagrechte Linien angedeutet. Das Tableau kann auch als die Systematische Konstruktion eines Gegenbeispiels interpretiert werden, die im obigen Fall fehlgeschlagen ist.
Offensichtlich hat man zur Argumentation im Tableau die auf den Wahrheitstafeln beruhende semantische Definition der Junktoren benutzt. Um von solchen Überlegungen unabhängig zu sein, gibt Beth ähnlich den Gentzenschen Schlußregeln definierende Übergangs-Regeln für die logischen Konnektoren an, durch deren schematische (kalkülmäßige) Anwendung Ableitungen der obigen Art durchgeführt werden können.

Übergangsregeln:

Ü	gültig	ungültig
	$\neg a$	a

"Steht $\neg a$ in der linken Spalte, so wird a in die rechte geschrieben."

gültig	ungültig
a	$\neg a$

"Steht $\neg a$ in der rechten Spalte, so wird a in die linke geschrieben."

gültig	ungültig
$a \wedge b$	
a	
b	

gültig	ungültig
	$a \wedge b$
	$a \mid b$

gültig	ungültig
$a \vee b$	
$a \mid b$	

gültig	ungültig
	$a \vee b$
	a
	b

gültig	ungültig
$a \longrightarrow b$	
$b \mid$	$\mid a$

gültig	ungültig
	$a \longrightarrow b$
a	b

gültig	ungültig
$\bigwedge_x a(x)$	
$a(x\|y)$	

gültig	ungültig
	$\bigwedge_x a(x)$
	$a(x\|y)$

gültig	ungültig
$\bigvee_x a(x)$	
$a(x\|y)$	

gültig	ungültig
	$\bigvee_x a(x)$
	$a(x\|y)$

$a(x|y)$ bedeutet: die in $a(x)$ frei vorkommende Variable x wird im Ausdruck $a(x)$ überall durch y ersetzt. y darf dabei nicht im Wirkungsbereich eines mit y gleichnamigen Quantors liegen.

Ein etwas komplizierteres Beispiel soll die Funktionsweise des Bethschen Tableau-Kalküls erläutern.

"Kann $\bigvee_z P(z) \wedge \neg S(z)$ logisch aus $\bigvee_x P(x) \wedge \neg M(x)$ und $\bigvee_y M(y) \wedge \neg S(y)$ gefolgert werden?"

Bem.: P(x) bedeutet: x hat die Eigenschaft P ; analoges gilt für M(x) , S(x).

gültig	ungültig
1) $\bigvee_x P(x) \wedge \neg M(x)$	3) $\bigvee_z P(z) \wedge \neg S(z)$
2) $\bigvee_y M(y) \wedge \neg S(y)$	
4) $P(a) \wedge \neg M(a)$	
5) $P(a)$	
6) $\neg M(a)$	7) $M(a)$
8) $M(b) \wedge \neg S(b)$	
9) $M(b)$	
10) $\neg S(b)$	11) $S(b)$
	12) $P(a) \wedge \neg S(a)$
15) $S(a)$	13) $P(a)$ | 14) $\neg S(a)$
	16) $P(b) \wedge \neg S(b)$
19) $S(b)$	17) $P(b)$ | 18) $\neg S(b)$

Dieses Tableau ist durch schematische Anwendung der Regeln Ü entstanden. Das Element, welches 1) bzw. 2) erfüllt, erhält den Namen a bzw. b (vgl. 4) bzw. 8)). Da $\bigvee_z P(z) \wedge \neg S(z)$ ungültig angenommen wird, erfüllt weder a noch b diese Bedingung (vgl. 12) bzw. 16)).

Das aus 12) resultierende linke Subtableau 13) kann wegen 5) abgeschlossen werden. Das durch 14) eröffnete Subtableau spaltet erneut wegen 16) auf: der rechte Teil kann wegen 19) und 11) geschlossen werden, der linke Teil bleibt offen, daher war die Konstruktion eines Gegenbeispiels Erfolg.

Als Individuenbereich dient ein zweielementiges Universum $\{a, b\}$ für das gilt $P(a)$, $\neg P(b)$, $S(a)$, $\neg S(b)$, $\neg M(a)$, $M(b)$.

Durch einen einfachen Trick kann man aus dem Tableau eine konventionelle Deduktion erhalten. Man läßt dazu die linke Spalte unverändert und fügt ihr alle Ausdrücke der rechten Spalte in der umgekehrten Reihenfolge hinzu.

Diese Umformung soll nun am Beweis des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck gezeigt werden[1]. Dieses Beispiel demonstriert außerdem Beths Lösung des Locke - Berkeley - Problems.

Mit x, y, z ... seien die Punkte der euklidischen Ebene bezeichnet. Falls man mit $\Delta(x, y, z)$ bzw. $W(x, y, z)$ die Eigenschaften bezeichnet "die Punkte x, y, z bilden ein Dreieck" bzw. "die Summe der Winkel xyz , yzx , zxy beträgt 18o° " lautet der Satz über die Winkelsumme im Dreieck:

1) $\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z \Delta(x, y, z) \longrightarrow W(x, y, z)$

Mit K werde das System der Axiome und der für den Beweis von 1) relevanten Definitionen bezeichnet.

Gemäß den Übergangsregeln gewinnt man das folgende Tableau, das nur den Beginn des Beweises wiedergibt.

gültig	ungültig
1) K	2) $\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z [\Delta(x, y, z) \longrightarrow W(x, y, z)]$
	3) $\bigwedge_y \bigwedge_z [\Delta(A, y, z) \longrightarrow W(A, y, z)]$
	4) $\bigwedge_z [\Delta(A, B, z) \longrightarrow W(A, B, z)]$
6) $\Delta(A, B, C)$	5) $\Delta(A, B, C) \longrightarrow W(A, B, C)$
	7) $W(A, B, C)$

Da es sich bei 1) um einen im Rahmen der Euklidischen Geometrie gültigen Satz handelt, schließt das Tableau. Wendet man nun die oben angedeutete Umformungsregel an, so erhält man das folgende konventionelle Beweisschema:

1) K

6) $\Delta(A, B, C)$

...

7) $W(A, B, C)$

5) $\Delta(A, B, C) \longrightarrow W(A, B, C)$

4) $\bigwedge_z [\Delta(A, B, z) \longrightarrow W(A, B, z)]$

3) $\bigwedge_y \bigwedge_z [\Delta(A, y, z) \longrightarrow W(A, y, z)]$

2) $\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z [\Delta(x, y, z) \longrightarrow W(x, y, z)]$

---

1 E. Beth, J. Piaget (1966) S. 77 f

Beth kommentiert diese Ableitung mit den Worten: "Now this is a demonstration of the type which gave rise to the Locke - Berkeley - problem. First we add to the premisses formula 6): "Let ABC be any triangle. Then we demonstrate 7) ... We dispose of the supplementary premiss by stating the conclusion in a hypothetical form: "If ABC is a triangle, then ..." And finally we generalise the conclusion." [1]

b) Didaktische Analyse der Systeme von E. Beth, G. Gentzen, N. Kolmogorow

Im folgenden werden die Logikkalküle von Beth, Gentzen und Kolmogorov, die allesamt die instrumentale Funktion der Logik akzentuieren unter didaktischen Gesichtspunkten untersucht.
Die im 2. Abschnitt dieses Kapitels unternommene Analyse des Lösungsvollzugs einer komplexen Aufgabe hat die Notwendigkeit einer engen Verknüpfung logischer Konnektoren mit Handlungsschemata erbracht. Ist die logische Struktur der Aufgabe, sowie der zu ihrer Lösung benötigten Definitionen und Sätze hinreichend transparent[2], so soll der Aufgabenlöser durch die logischen Konnektoren zum Vollzug gewisser Handlungen aufgefordert werden. Die auf der Semantik logischer Partikeln beruhende, auf den Aufgabenlöser auszuübende Wirkung - der Aufforderungscharakter logischer Konnektoren - ist ein unter operativ-inhaltlichen Gesichtspunkten wichtiges qualitatives Kriterium für die didaktische "Güte" ihrer Semantik. Unter diesem Aspekt werden im folgenden die Logikkalküle von Beth, Gentzen und Kolmogorov, die jeweils auch den operativen Sinn logischer Konnektoren definieren, untersucht. In einer nach dem o.g. Prinzip erstellten Güte-Rangordnung würde die Wahrheitstafel-Semantik sicher den untersten Platz einnehmen. Die didaktische Bedeutung der Kolmogorovschen Aufgabenlogik würdigt R. Jeuck mit den Worten: "Der didaktische Wert der Kolmogorovschen Interpretation der Brouwerschen Logik findet sich in der Betonung des operativen Moments der Logik. Sie hat es nur mit Handlungen, eben den Aufgaben und ihren Lösungsvollzügen

---

1 a.a.O. S. 78

2 Es ist ein anderes didaktisches Problem, den Lernenden zu befähigen, die logische Struktur sprachlicher Gebilde selbständig transparent zu machen.

zu tun." [1]

Und an anderer Stelle heißt es: "Der wesentliche Vorzug einer solchen Logik besteht eben darin, daß für sie das didaktisch so wichtige operative Moment aber selbst schon immanent konstitutiv ist." [2] Diese Feststellung trifft ganz gewiß auf die operative Interpretation der Partikel $\wedge, \vee, \longrightarrow, \neg$ als Aufgabenkonnektoren zu. Auf die Satzbestimmungen unter III A läßt sich allerdings die von Gentzen an den Systemen von Frege, Russel und Hilbert angebrachte Kritik über ihre geringe Praktikabilität übertragen (vgl. S.112). Ein Teil der elementaren Aufgaben ist durchaus natürlich; den Schemata 3, 4, 6, 9, 11 entsprechen Lösungsvollzüge, die häufig in der Praxis Verwendung finden. Die restlichen Aufgaben wirken unnatürlich und scheinen wohl auch nur aus theoretischen Erwägungen in die Liste der Satzbestimmungen aufgenommen worden zu sein. Jenck, der seine Ausführungen zur Aufgabenlogik als programmatische Zielsetzung verstanden haben will, verweist auf die "prinzipielle Durchführbarkeit der Erstellung der intuitionistischen Logik aus ihrer Interpretation als Aufgabenrechnung." [3] Das didaktische Problem liegt nun m.E. gerade bei der Art und Weise dieser Erstellung. Nicht zu vertreten ist sicher die Verordnung der Satzbestimmungen und deren Interpretation in konkreten Aufgabensituationen. Es könnte daher im Unterricht nur um eine Genese der unter III A aufgezählten Aufgabenformen durch Analyse von Aufgabenlösungen und nachfolgende "abstraction réfléchissante" gehen, wozu jedoch hinreichende Erfahrungen im Lösen komplexer Aufgaben gehören. Allenfalls würde dieses Verfahren jedoch einen Zugang zu den "natürlichen" Aufgabenformen (3, 4, 6, 9, 11) liefern. Da die Lösung der Aufgabe $a \vee \neg a$ [4] nicht postuliert wird, kann in der Aufgabenlogik die Aufgabe $\vdash (\neg b \longrightarrow \neg a) \longrightarrow (a \longrightarrow b)$ nicht als gelöst betrachtet werden. Damit ist aber der Weg zur indirekten Argumentation verschlossen. Anders gewendet: die im Unterricht häufig angewandte Methode, die Lösung von $a \longrightarrow b$ auf die von $\neg b \longrightarrow \neg a$ zurückzuführen (Kontraposition), findet in der Aufgabenlösung keine Berücksichtigung. Überhaupt erweist sich der Aus-

---

1 R. Jeuck (1973) S. 45

2 a.a.O. S. 46

3 a.a.O. S. 45 f

4 Äquivalent dazu ist $\vdash \neg\neg a \longrightarrow a$

schluß von $\vdash (a \vee \neg a)$ sowohl für den Mathematikunterricht als auch für die nicht grundlagentheoretisch orientierte Mathematik als problematisch und es erscheint nützlich $\vdash a \vee \neg a$ zumindest als "Fiktion" gelten zu lassen, deren Problematik natürlich zu einem angemessenen Zeitpunkt auch im Unterricht diskutiert werden sollte. Man wird sich somit aus praktischen Gründen für eine kritisch bewußte Zulassung von $\vdash a \vee \neg a$ entschließen, da der Schüler bzw. der praktisch arbeitende Mathematiker kaum mit Problemen vom Typ des "Fermat", der Goldbachschen Vermutung oder den in Beth[1] genannten Beispielen befaßt ist.

Neben der operativen Deutung von $\bigvee_x a(x)$ als die Aufgabe, ein x zu konstruieren bzw. anzugeben, welches $a(x)$ löst[2], ist besonders die Kolmogorovsche Interpretation von $\bigwedge_x a(x)$ von didaktischem Interesse. Der Beweis von Allaussagen (bzw. die Widerlegung) wurde bisher im Unterricht bekanntlich kaum systematisch erörtert.

Bei Kolmogorov bedeutet $\bigwedge_x a(x)$ die Aufgabe "eine allgemeine Methode für die Lösung von $a(x)$ bei jedem einzelnen Wert von x anzugeben". Man soll dies so verstehen: "Die Aufgabe $\bigwedge_x a(x)$ zu lösen, bedeutet, imstande sein, für jeden gegebenen Einzelwert x_0 von x die Aufgabe $a(x_0)$ nach einer endlichen Reihe von im voraus (schon vor der Wahl von x_0) bekannten Schritten zu lösen."

In der Wendung: "für jeden" - ich ergänze: vom Aufgabenlöser oder einem anderen "gegebenen Einzelwert x_0 ..." - steckt offensichtlich ein dialogischer Zug.

Soll die Aufgabe gelöst werden $\bigwedge_{y \in \mathbb{R}^+} \bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^2 = y$ (vgl. S.109), so besagt die obige Deutung, daß der Aufgabenlöser in der Lage sein soll, für ein von ihm oder anderen gewähltes y , etwa $y_0 = 2$ die Aufgabe $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 2$ zu lösen. In der obigen Erläuterung von Kolmogorov stört natürlich noch die Wendung "für jeden gegebenen Einzelwert x_0 von x ...", da sie ja lediglich den Allquantor auf das metasprachliche Niveau verschiebt. Er durchbricht intuitiv den hier vorliegenden Zirkel durch die Festsetzung, daß $a(x)$ durch im voraus (schon vor der Wahl von x)..." bekannte Schritte zu lösen ist.

Im o.g. Beispiel bedeutet dies: die Lösung von $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^2 = y$ darf

---

1 E. Beth (1965) S. 413 ff

2 N. Kolmogorov (1932) S. 64 f

nicht von der besonderen Wahl eines y_0 abhängen, vielmehr muß ich im Besitze eines Verfahrens, einer Strategie sein, auf beliebig vorgegebenes y_0 mit der Lösung von $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^2 = y$ reagieren zu können. Die Strategie für diese Aufgabe ist der Quadratwurzelalgorithmus (oder unter algebraischem Aspekt das Schema $\sqrt{y_0} = x_0$).

Aus den bisherigen Ausführungen geht hervor, daß die Kolmogorovsche Deutung der logischen Zeichen $\wedge, \vee, \neg, \longrightarrow, \bigwedge$, als Aufgabenkonnektoren und die operative Interpretation des Terminus "Aufgabe" den am Anfang dieses Abschnitts formulierten didaktischen Forderungen recht nahe kommen. Meiner Auffassung nach bedarf es lediglich noch einer deutlichen Herausstellung des Aufforderungscharakters der mit logisch verknüpften Aufgaben verbundenen Handlungsschemata.

Die Bedeutung logischer Konnektoren in Verbindung mit dem Gebrauch der Übergangsregeln (Bethsche Tableaus) zu lehren, halte ich für unzweckmäßig, da die Übergangs-Handlungen zu stark an die Tableaus gebunden sind. Formt man einen im Tableau geführten Beweis in die konventionelle Form um, so geht das in den Übergangsregeln steckende operative Moment verloren. Im Gegensatz zur Aufgabenrechnung läßt die Methode von Beth keinen didaktisch brauchbaren Weg zu den Quantoren erkennen, was sich schon in der wenig differenzierten Struktur der zu All- und Existenzquantor gehörigen Tableaus zeigt. Als Instrument der Logik könnten die Bethschen Tableaus - evtl. an der Stelle der langweiligen Wahrheitstafelbeweise - auch im Unterricht Anwendung finden.

Interpretiert man die logischen Junktoren als Mengenoperatoren, so können mit der Tableaumethode kalkülmäßig, ohne Rückgang auf logische Elemente, Beziehungen der Mengenalgebra bewiesen werden [1]. Ebenso wie im Kalkül von Beth erfolgt im Gentzen-Kalkül die Einführung des Allquantors in einer für den Unterricht wenig zu gebrauchenden Weise. Dies geht am deutlichsten aus der von Gentzen selbst gegebenen Erläuterung für die $\bigwedge$ - Einführungsregel hervor. Es ist dies auch die Stelle, an der das in den anderen Schlußschemata vorfindliche operative Moment - im Gegensatz etwa zur Kolmogorovschen Interpretation - gänzlich in den Hintergrund gerät. Die Schlußfiguren schematisieren zwar auf natürliche Art, häufig geübte Schlußwei-

---

1 Dieser Gedanke soll an anderer Stelle ausführlich behandelt werden.

sen, werden jedoch durch das Auftreten von zusätzlichen Annahmeformeln ("$\lceil A \rceil$") z.T. unübersichtlich und sind m.E. für die Erfüllung des Zieles, die Bedeutung von Konnektoren durch den Gebrauch prägnanter Handlungsschemata zu erlernen, zu wenig suggestiv.
Ist allerdings die Bedeutung logischer Partikel für den Aufgabenlösungsprozeß einmal erkannt, so dürfte es keine großen Schwierigkeiten bereiten, den Gentzenkalkül aus der Analyse von Beweisen zu gewinnen. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß in allen hier diskutierten Logikkalkülen operative Ansätze vorhanden sind. Besonders ausgeprägt ist dieses Merkmal in der Aufgabenlogik Kolmogorovs. Neben anderen, aus didaktischer Perspektive erkennbaren Schwächen - insbesondere im Zusammenhang mit der Einführung des Allquantors (Ausnahme: Kolmogorov) - ist m.E. die Verbindung zwischen logischem Konnektor und Handlungsschema, zwischen logischem Zeichen und assoziierter Handlung zu wenig suggestiv.
Im Anschluß an die im folgenden Abschnitt unter allgemeinen Gesichtspunkten zu erörternde Beziehung zwischen Zeichen, Bedeutung und Handlung werden Handlungsschemata mit einem stärkeren "action-appeal" vorgeschlagen. Vor allem kann dann auch Kolmogorovs intuitive Erklärung von $\bigwedge_x a(x)$ in einer für den Unterricht praktikablen Weise präzisiert werden.

4. Die pragmatische Funktion logischer Konnektoren

a) Grundbegriffe der Semiotik

Die Ausführungen in den beiden vorangehenden Abschnitten ließen enge Beziehungen zwischen der Bedeutung logischer Zeichen und den durch diese Zeichen stimulierten (Beweis-, Identifizierungs-) Handlungen erkennen. Während sich jene Handlungen nicht auf die logischen Zeichen selbst beziehen, bewirkt ein zweiter Typ von Handlungen, wie wir gesehen haben, die Umformung logischer Zeichen. Als Stichwort hierzu sei die Operation der Negation erwähnt[1]. Die Beziehungen zwischen der Bedeutung von Zeichen, den regelhaften Umformungen von Zeichen und den durch Zeichen bewirkten (beabsichtigten) Handlungen untersucht die Semiotik. Aus der im 2. Abschnitt durchgeführten Analyse kann der vorläufige Schluß gezogen werden, daß die Berücksichtigung semiotischer Aspekte beim Lernen ein wichtiges didaktisches Problem ist.

Damit für das weitere ein adäquater begrifflicher Rahmen zur Verfügung steht, werden zunächst einige wichtige Elemente der Semiotik zusammengestellt[2].

Unter Semiotik versteht man die allgemeine Lehre von den sprachlichen Zeichen und Zeichenreihen. Der Begriff sprachlich wird sehr weit gefaßt und schließt sowohl natürliche als auch künstliche und formale Sprachen ein. In diesem Sinn können mathematische oder logische Strukturen als formale Sprachen aufgefaßt werden.

Ein Zeichen ist nach H. Frank ein spezieller Wahrnehmungsinhalt, der über sich hinaus auf etwas anderes - ein Referendum - verweist. Die Zeichen haben verschiedene Funktionen zu erfüllen, deren Studium Gegenstand der Semiotik ist.

Abstrahiert man vom Referendum eines Zeichens, bleibt seine syntaktische Zeichenfunktion. Der syntaktische Aspekt der Semiotik bezieht sich auf die Beziehungen zwischen Zeichen und anderen Zeichen. Die Syntax einer Sprache zeichnet durch Formationsregeln in der Menge aller bildbaren Zeichenreihen sog. zulässige Ausdrücke aus. Die

---

1 Die Operation der Kontraposition wäre ein weiteres Beispiel für eine Umformungshandlung, die sich auf die logischen Konnektoren selbst bezieht.

2 Wir folgen G. Klaus, Wörterbuch der Kybernetik, Frankfurt (1969) sowie H. Frank, Kybernetische Grundlagen der Pädagogik, Baden - Baden (1969).

Transformationsregeln legen fest, wie man von zulässigen Ausdrücken zu anderen zulässigen Ausdrücken gelangen kann.
H. Frank trennt, wie das folgende zeigt, scharf zwischen semantischem Zeichenaspekt und semantischer Zeichenfunktion. (Andere Autoren sprechen nur von "semantischer Dimension"). "Die Überlegung, ein Zeichen könnte ... auf eine Bedeutung verweisen und damit eine semantische Funktion erfüllen können, kennzeichnet schließlich den semantischen Zeichenaspekt." [1]
Die semantische Funktion von Zeichen gilt als erfüllt, wenn nach Frank zwischen Sender und Empfänger von Zeichen über die zugehörigen Bedeutungen eine genügende Übereinstimmung besteht. Die Semantik hat es u.a. mit den möglichen inhaltlichen Deutungen - Interpretationen - abstrakter Systeme von Zeichen zu tun.
Schließlich hat die semantische Funktion einen pragmatischen Aspekt, der auf die pragmatische Funktion von Zeichen verweist.
Die pragmatische Zeichenfunktion betrifft nach Frank das zielgerichtete Verhalten des Menschen, das sie zu steuern bestimmt ist. Ein Zeichen erfüllt eine pragmatische oder wie man auch sagt Signalfunktion dann, wenn es ein den Empfänger betreffenden Imperativ enthält, der von diesem tatsächlich als Herausforderung, ihm nachzukommen, empfunden wird. Wichtig ist ferner die Symbolfunktion von Zeichen einer Sprache; Zeichen erfüllen eine Symbolfunktion, wenn sie Sachverhalte oder Ereignisse etc. beschreiben. Symbolfunktion und Signalfunktion sind spezifische Gegenstände der Pragmatik, welche allgemein die Beziehungen zwischen Zeichen und Sender bzw. Empfänger untersucht.

b) Semiotik und Lernprozeß

Die didaktische Zielsetzung der Verknüpfung logischer Konnektoren mit Handlungsschemata wäre nach den bisherigen Überlegungen mit den Kalkülen von Beth, Gentzen bzw. Kolmogorov realisierbar. Die zusätzliche didaktische Forderung, daß die von den Konnektoren auf den Aufgabenlöser ausgeübte Aufforderungsfunktion möglichst stark sei, führte

---

1 Ein Schüler könnte sehr wohl die Zeichen in einem Buch über Kategorien als bedeutungsvoll erkennen - im Unterschied zu einer chaotisch anmutenden Ansammlung von Schreibfiguren - ohne jedoch ihre Bedeutung entschlüsseln zu können.

im vorangehenden Teilabschnitt zu einer Rangordnung der Systeme von Beth, Gentzen, Kolmogorov. Der Aufforderungscharakter logischer Partikeln könnte ebensogut durch den Terminus Signalfunktion beschrieben werden, kommt es doch darauf an, daß der Lernende mit den logischen Zeichen einen Imperativ verbindet, der ihn das entsprechende, dem Konnektor zugeordnete Handlungsschema realisieren läßt. Als didaktisch besonders günstig werden sich solche Handlungsschemata erweisen, bei denen der imperative Aspekt in einem bestimmten Maße selbst schon konstitutives Element der Handlungsschemata ist. Da in die bisherigen und folgenden didaktischen Überlegungen wesentlich semiotische Gesichtspunkte hineinspielen, werden zunächst allgemeine Beziehungen zwischen Semiotik und Lernprozeß auf der Grundlage einer Arbeit von H. Winter diskutiert, der wohl erstmals die semiotische Dimension von Zeichen in Bezug auf den Lernprozeß untersucht hat [1].

Die semiotischen Dimensionen im mathematischen Lernprozeß

Entsprechend der syntaktischen, semantischen, pragmatischen Funktion von Zeichen, lassen sich - und das ist eine häufig anzutreffende Sprechweise - am Zeichen drei ebenso bezeichnete Dimensionen unterscheiden. Der Übergang zur Zeichendimension bringt, da dieser als Oberbegriff für Zeichenaspekt und Zeichenfunktion dient, eine begriffliche Vergröberung mit sich, die für die folgenden Ausführungen[2] jedoch zunächst keine Rolle spielt.
Den semiotischen Dimensionen mathematischer Zeichen lassen sich nach H. Winter bestimmte Grundtätigkeiten und angestrebte Tugenden des Schülers zuordnen (vgl. Tabelle).

Dimension	Grundtätigkeit des Schülers
syntaktisch	rechnen, formalisieren
semantisch	verstehen, einsehen
pragmatisch	praktisch anwenden, nachdenken, staunen

1 H.Winter (197o) S. 157 ff

2 Auf der Grundlage der Arbeit von H. Winter (197o)

Allgemein könnte die Aufgabe einer semiotisch orientierten Didaktik dahingehend bestimmt werden, die semiotischen Dimensionen von Zeichensystemen (Sprachen) in Beziehung zum Lernprozeß zu setzen.
Beispiele: J. Bruners Theorie der Repräsentation (EIS)
H. Griesels Begriff der isomorphen Konkretisierung.
In der syntaktischen Dimension mathematischer Lernprozesse geht es nach Winter "um formale Fertigkeiten, um Kalküle, um Rechnen im engeren Sinn". Kalkülspiele sind seiner Meinung nach im elementaren Mathematikunterricht der natürliche Ansatzpunkt zur Förderung der syntaktischen Dimension im Lernprozeß.
In der syntaktischen Dimension des Lernprozesses kommt es in erster Linie auf das Erkennen des operativen Sinns von Zeichen an. Dieser ergibt sich nach G. Klaus "aus den syntaktischen Beziehungen und Regeln, die in einer Sprache gelten und festlegen, wie Zeichen zu Ausdrücken zusammengesetzt und diese Ausdrücke umgeformt werden können." Der operative Sinn von Zeichen wird somit durch die Formations- bzw. Transformationsregeln bestimmt. Damit man syntaktisch operieren kann, müssen aber die an jene Regeln bzw. an die Zeichen jener Regeln gebundenen Imperative befolgt werden können, weshalb die pragmatische Funktion von Zeichen in die syntaktische Dimension des Lernprozesses hineinspielt.
Die o.a. Tabelle ist somit durch die Grundtätigkeit "regelhaftes (syntaktisches) Manipulieren von Zeichen" zu ergänzen.
Beispiel. Formale Fertigkeiten auf dem Gebiet der Logik zu besitzen, bedeute: Formations- und Transformationsregeln z.B. der Prädikatenlogik zu beherrschen.
In operationalisierter Form:

a) Entscheiden können, ob vorgegebene Zeichenreihen Ausdrücke des Prädikatenkalküls sind (d.h. feststellen können, ob sie gemäß den Formationsregeln syntaktisch sinnvoll sind)
b) Umformungen vorgegebener Ausdrücke vornehmen zu können, etwa:

$$\neg \bigwedge_x [a(x) \longrightarrow b(x)] \quad \text{in} \quad \bigvee_x \neg [a(x) \longrightarrow b(x)] \quad \text{in}$$

$$\bigvee_x [a(x) \wedge \neg b(x)].$$

Wie die Analyse der Aufgabe im ersten Abschnitt ergeben hat, kommt formalen Fertigkeiten auf dem Gebiet der Logik für das Lösen von Problemen eine große Bedeutung zu; wir kommen darauf noch zurück.

Die semantische Dimension im Lernprozeß wird nach Winter durch den Begriff des didaktischen Modells charakterisiert. Die Bedeutung der semantischen Dimension für das Lernen unterstreicht Winter mit den Worten: "Der Übergang von den praktischen Modellsituationen zu den (mathematischen) Begriffen und der umgekehrte Vorgang sind Grundanliegen der didaktischen Bemühungen und der Kern mathematischen Lernens."
Da das didaktische Modell nur als homomorph zum abstrakten Begriffssystem gefordert wird, zieht die Deutung der semantischen Dimension im Lernprozeß eine Einengung der semantischen Zeichenfunktion der im Modell repräsentierten Zeichen nach sich.
So bedeutet der Mächtigkeitsvergleich zweier Mengen sicher etwas anderes als die Dinge zweier Haufen paarweiser mit Seilchen zu verbinden. Didaktische Modelle für die aussagenlogischen Junktoren geben gewisse Schaltkreise ab, die in ihrer symbolischen Darstellung Gegenstand der Schaltalgebra sind. Auch Venn - Diagramme können zur Modellierung verwendet werden.
Die Überlegungen des 2. Abschnitts berechtigen jedoch zu dem Schluß, daß es bei den logischen Konnektoren, soweit sie für Aufgabenlösungen relevant sind, nicht auf die Bereitstellung eines didaktischen Modells ankommt, sondern auf die Verbindung einer Bedeutung (im Sinne der Semiotik) mit diesen Zeichen. Die in der Umgangssprache als Metasprache vorgenommene Definition des eidetischen Sinns logischer Zeichen ist offensichtlich keine didaktisch vertretbare Möglichkeit. Die Interpretation durch Boolesche Funktionen (Wahrheitstafeln) wurde bereits beleuchtet. Ehe wir diesen Punkt weiter verfolgen, wenden wir uns der pragmatischen Dimension im Lernprozeß zu. "Für den Didaktiker" schreibt Winter "ist die pragmatische Dimension von entscheidender Bedeutung, hierdurch nämlich unterscheidet er sich vom Mathematiker. Ihn interessiert Mathematik im Hinblick auf den Menschen, speziell im Hinblick auf einen möglicherweise bildenden (prägenden) Einfluß auf heranwachsende Menschen." Dieser äußerst weite Rahmen, der hier abgesteckt wird, kann aus der Zielsetzung der Pragmatik, welche die Beziehungen zwischen Zeichen und den Schöpfern, Sendern und Empfängern von Zeichen untersucht und daher auch soziologische, lern-, verhaltens- und sprachpsychologische Aspekte berücksichtigen muß, erklärt werden.

Für den Unterricht ergeben sich in pragmatischer Sicht nach Winter zwei Hauptaufgaben.
Die eine zielt auf den affektiven Bereich ab und ist mit dem Problem der Motivation mathematischer Lernprozesse befaßt. Beispiel: Wie können Beweise im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I motiviert werden?
Auf diese Frage kommen wir im nächsten Abschnitt in Verbindung mit der von H. Vollrath vorgeschlagenen dialogischen Beweismethode zurück.
Die andere Hauptaufgabe sieht Winter "... in dem Bemühen, die Schüler Strategien zum begrifflichen Ordnen von (inner- oder außermathematischen) Situationen lernen zu lassen." Beispiele allgemeiner Strategien sind: Klassifizieren, Seriieren, Generalisieren, Analogisieren.
Die bisherigen Ausführungen zeigen, daß sich die pragmatische Dimension des Lernprozesses eher auf den pragmatischen Aspekt der Semiotik, der die allgemeinen Wechselwirkungen zwischen Zeichen, Sender und Empfänger untersucht, bezieht als auf die pragmatische Funktion von Zeichen.
Nun kommt es aber, wie das Beispiel im 2. Abschnitt verdeutlicht hat, bei den logische Konnektoren gerade darauf an, diese Zeichen in ihrer pragmatischen Funktion zu erkennen, mit ihnen einen Imperativ zu verbinden, und dementsprechende Beweishandlungen zu vollziehen.
Eine zu erstrebende Verhaltensweise bei Schülern in der pragmatischen Dimension des Lernprozesses ist daher, gemäß den durch Zeichen gegebenen Imperativen zu handeln. In diesem Sinne wäre die Tabelle auf S.133 ebenfalls zu ergänzen.
Mit der Verbindung von Zeichen und Handlungen haben sich u.a. J. Piaget und u.a. L. Wittgenstein beschäftigt. Piaget schreibt:"In irgendeinem Ausdruck, wie z.B. $x^2 + y = z - n$ bezeichnet jedes Glied im Grunde eine Handlung. Das Zeichen (=) drückt die Möglichkeit eines Austausches aus, das Zeichen (+) eine Vereinigung .... Das Quadrat steht für die Handlung den Wert x x-mal wiederzugeben, und jeder der Werte n, x, y, z bedeutet die Handlung, die Einheit eine gewisse Anzahl mal zu reproduzieren. Jedes dieser Symbole bezieht sich also auf eine Handlung, die real sein könnte, bei der sich aber die mathematische Sprache darauf beschränkt, sie abstrakt

anzuzeigen, und zwar in der Form verinnerlichter Handlungen, d.h. gedanklicher Operationen." [1]

In dieser Passage bringt Piaget den Gedanken der "Verkörperung"von Handlungen durch Zeichen zum Ausdruck. Ähnliche Überlegungen findet man bei Wittgenstein.

Im Traktat (4.241) heißt es: "Gebrauche ich zwei Zeichen in ein und derselben Bedeutung, so drücke ich dies aus, indem ich zwischen beide das Zeichen "=" setze. "a = b" heißt also: das Zeichen "a" ist durch das Zeichen "b" ersetzbar. Der operative Sinn des Zeichens "=" liegt also in der Ersetzbarkeit einer Zeichenreihe durch eine andere. Gleichungen spielen nach Wittgenstein ebenso wie Definitionen die Rolle von Substitutionsregeln. In ihnen wird der Gebrauch von Zeichen festgesetzt. In seiner Spätphilosophie, u.a. im Zusammenhang mit dem Thema "Sprachspiel" vertritt Wittgenstein die Auffassung: "Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache." [2] Und weiter heißt es: "Jedes Zeichen scheint allein tot ... Im Gebrauch lebt es." [3] In der Mathematik erkennt Wittgenstein ein erstes Beispiel für ein Sprachspiel. Folgt man der Bedeutungstheorie Wittgensteins, so läßt sich sagen, daß speziell die Bedeutung logischer Zeichen durch ihren Gebrauch im mathematischen Sprachspiel bestimmt wird.

---

1 Cit. n. Aebli (1963) S. 54

2 L. Wittgenstein, Philosophische Untersuchungen (1953) § 43

3 a.a.O. § 432

5. Interpretation logischer Konnektoren durch dialogische Handlungsschemata

Die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen lassen sich zu der didaktischen Forderung zusammenfassen, im Unterricht die pragmatische Funktion logischer Konnektoren zu erschließen und bewußt zu machen. Umgekehrt sollen Schüler die Bedeutung der logischen Konnektoren durch inhaltliche Aktivitäten kennenlernen; die Struktur dieser inhaltlichen Aktivitäten wird durch die entsprechenden Handlungsschemata bestimmt, die mit den Konnektoren verbunden sind. Manches Fehlverhalten von Schülern bei der Lösung von Aufgaben, manche Ratlosigkeit hinsichtlich des Lösungsbeginns könnte zum Teil durch eine "Blindheit" gegenüber der pragmatischen Funktion logischer Zeichen erklärt werden [1].

Im folgenden wird ein Vorschlag zur Einführung logischer Konnektoren durch dialogische Handlungsschemata angegeben, der in seinem theoretischen Kern auf die dialogische Interpretation logischer Partikeln durch P. Lorenzen zurückgeht, aber auch gewisse Aspekte der Kolmogorovschen Aufgabenlogik berücksichtigt.

Die nachstehend wiedergegebene stilisierte Unterrichtssituation soll zur Vorbereitung dienen.

Wir nehmen an, Schüler eines 11. Schuljahres hätten die Aufgabe zu lösen: "Beweise oder widerlege: die Funktion $f : R \longrightarrow R^+$, $f(x) = x^2$ ist bijektiv." (vgl. 2. Abschnitt). Bei der Besprechung der Aufgabe im Unterricht könnte sich folgender, stark vereinfachter Dialog abspielen.

Lehrer: "Wer hat die Aufgabe gelöst?"

Paul : "Die Funktion ist bijektiv."

(Die Schüler Otto, Olaf und andere opponieren lautstark)

Lehrer: "Ist die Funktion surjektiv?"

Paul : "Natürlich."

Lehrer: "Kannst du uns das vorführen?"

(Paul bringt beweiskräftige Argumente vor)

Lehrer: "Nun, ist die Funktion auch injektiv?"

(Paul zaudert, Otto meldet sich zu Wort)

Otto : "Die Elemente $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ haben das gleiche Bildelement $y = 4$."

---

1 Zum Begriff "Blindheit" gegenüber semiotischen Zeichenfunktionen vgl. H. Frank, Kybernetische Grundlagen der Pädagogik.

Der Dialog weist die folgenden Merkmale auf:

a) Fragen nach, Zweifel an, Aufforderungen zu der Lösung gewisser Teilaufgaben einer komplexen Aufgabe.

b) Der effektive Vollzug der Lösung (Beweis) gewisser Teilaufgaben.

c) Widerlegung gewisser Teilaufgaben.

Die oben wiedergegebene Situation läßt deutlich ein auf zwei Gruppen[1] polarisiertes dialogisches Feld erkennen, in dem in seiner dynamischen Funktion wechselseitig Aussagen verteidigt oder angegriffen werden[2]. Der Proponent (Paul) behauptet den Beweis einer Aussage (die Lösung einer Aufgabe). Der Opponent (Person oder Personengruppe) kontrolliert Lösungsschritte, zieht in Zweifel, fordert den Proponenten zur Lösung von Teilaufgaben auf und übernimmt somit eine insgesamt kritische Funktion der gegenüber sich der Proponent zu behaupten hat. Da im Verlauf eines Dialogs auch der Opponent Behauptungen über die Lösung von Aufgaben (Beweis von Aussagen) aufstellen kann, die dann vom Proponenten bezweifelt werden könnten, ist das Verhältnis zwischen diesen beiden Parteien im rechten Dialog ziemlich symmetrisch; nur: der Proponent eröffnet den Dialog. Eine ähnliche verinnerlichte "dialogische" Situation ist nun auch beim Ringen einer Person um die Lösung einer Aufgabe denkbar, der Dialog erfüllt dann heuristische Funktionen. E. Wittmann beschreibt diese Situation: "Consider the pair proponent-opponent. It is quite natural to regard this pair as a sort of incarnation of two antagonistic elements living in a problem - solver's heart. The proponent represents the element which states hypotheses and strives to find proofs. The opponent represents an element which criticizes the arguments, controls them and calls them into question. The problem-solving situation may then be conceived of as a dialogue between the two antagonistic elements." [3]

Das didaktisch wichtige Element in der dialogischen Situation scheint mir die Möglichkeit zur Frage zu sein. Orientieren wir uns an dem Unterrichtsdialog! Wäre sich der Schüler bewußt, daß er aufgrund der

---

1 Die Gruppen brauchen natürlich nicht personell fixiert zu sein; ein geschickter Lehrer wird es evtl. für günstig halten, häufigere Positionswechsel (Rollenwechsel) vorzunehmen.

2 Der reale Unterrichtsdialog wird sich häufig in weniger geordneten Bahnen abspielen.

3 E. Wittmann (1972)

konjunktiven logischen Struktur des Definiendums von "bijektiv" nach beiden (Surjektivität und Injektivität beinhaltenden) Teilaufgaben gefragt werden kann - würde er von vorneherein mit diesen Angriffs-Möglichkeiten, die natürlich auch ausbleiben könnten, rechnen, so könnte angenommen werden, daß er sich, schon aus dem elementaren Bedürfnis heraus, recht zu behalten, um die Lösung beider Teilaufgaben bemühen würde. Somit kann gesagt werden, daß das Element der Frage bei der sofort zu gebenden präzisen Definition logischer Konnektoren durch dialogische Handlungsschemata im Aufgabenlöser einen indirekten Imperativ bewirkt. Bei der Kolmogorovschen Definition der Aufgabenkonnektoren kann man dagegen von einem direkten Imperativ sprechen. Da bei einer inhaltlich-operativen Auffassung von Logik nicht so sehr der statische Begriff der Wahrheit oder Falschheit von Aussagen vielmehr aber der dynamische Begriff des Beweises bzw. der Widerlegung von Aussagen, und somit die Lösung von Aufgaben interessiert, stehen die in den folgenden Tabellen verwendeten Variablen für Aufgaben, die logischen Konnektoren werden als Aufgabenkonnektoren gedeutet[1]. Im übrigen empfiehlt sich aber für den Unterricht eine flexible Anwendung sowohl der Aufgaben - als auch der Aussagensprechweise.

1. Die Behauptung der Lösung der Aufgabe $a \wedge b$ durch den Proponenten (P) kann vom Opponenten (O) auf zwei Weisen angegriffen werden:

O fragt nach der Lösung von a (a?)
O fragt nach der Lösung von b (b?)[2]

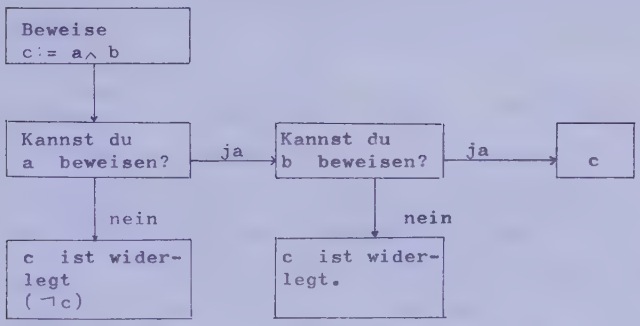
P sollte sich auf diese Angriffe mit den entsprechenden Lösungen verteidigen können; in dem für ihn ungünstigsten Fall ist er somit durch den Konnektor $\wedge$ aufgefordert, beide Teillösungen angeben zu können.
Dieser Sachverhalt kann folgendermaßen schematisch dargestellt werden:

Aufgabe	Angriff gegen $a \wedge b$		Verteidigung von $a \wedge b$ gegen den Angriff	
$a \wedge b$	a?	b?	Beweis von a (kurz: a)	Beweis von b (kurz: b)

1 Der Übergang zu Aussagen und Aussagenkonnektoren ist ohne Schwierigkeit zu vollziehen; ebenso bietet sich die Deutung der Variablen als Merkmal an.

2 Man kann diese Angriffe auch durch l? , r? (linke, rechte Teilaussagen) mitteilen.

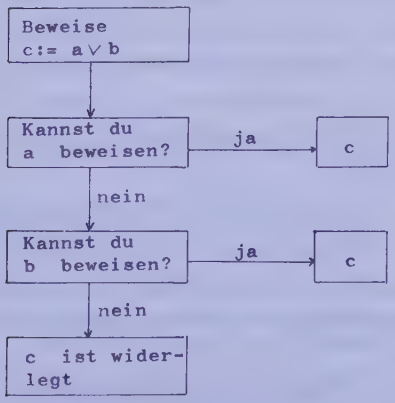
Auch die Darstellung des dialogischen Handlungsschemas in einem Flußdiagramm könnte für didaktische Zwecke nützlich sein.



2. Für einen Angriff auf die Aufgabe $a \vee b$ besteht nur die Möglichkeit, diese Aufgabe als Ganzes in Frage zu stellen (?). P kann sich auf diesen Angriff nach eigener Wahl mit der Lösung mindestens einer Teilaufgabe verteidigen.

Aufgabe	Angriff gegen $a \vee b$	Verteidigung von $a \vee b$ gegen den Angriff	
$a \vee b$	?	Wahlweise: Beweis von a	Beweis von b

Darstellung im Flußdiagramm



3. Zur Verteidigung der Aufgabe $\bigwedge_x a(x)$ muß der Proponent auf ein beliebiges vom Opponenten vorgegebenes x_o mit einem Beweis von $a(x_o)$ reagieren können. Der Allquantor ruft somit den Proponenten auf, sich in den Besitz einer Beweisstrategie zu bringen, die ihn gegen sämtlich nur möglichen Angriffe seitens des Opponenten schützt.

Aufgabe	Angriff gegen $\bigwedge_{x\in G} a(x)$	Verteidigung $\bigwedge_{x\in G} a(x)$ gegen den Angriff
$\bigwedge_{x\in G} a(x)$	x_o ?	$a(x_o)$

Die Darstellung dieses Schemas wäre für unendlichen Variabilitätsbereich G zwar in einem Flußdiagramm mit Schleife möglich, würde jedoch die Idee der Beweisstrategie dadurch verdecken.

4. $\bigvee_{x\in G} a(x)$ kann vom Opponenten nur wieder als Ganzes angegriffen werden (?). P verteidigt sich, indem er ein x_o angibt (konstruiert) für das er $a(x_o)$ beweisen kann. Auch hier versagt bei unendlichem Bereich G die Darstellung durch ein Flußdiagramm; der endliche Fall führt auf eine Erweiterung von 2.

Aufgabe	Angriff gegen $\bigvee_{x\in G} a(x)$	Verteidigung von $\bigvee_{x\in G} a(x)$ gegen den Angriff
$\bigvee_{x\in G} a(x)$	?	$a(x_o)$

5. In $\neg a$ fungiert " $\neg$ " als Widerlegungsoperator. Wird $\neg a$ behauptet, so muß der Proponent damit rechnen, daß der Opponent seinerseits a behauptet. Gelingt ihm, a gegen den Proponenten zu verteidigen, so ist $\neg a$ widerlegt; gelingt es ihm nicht, so gelte a als widerlegt (d.h. $\neg a$ wurde erfolgreich verteidigt).
Für den inhaltlich orientierten Aufgabenlösungsprozeß erscheint diese Dialogregel-schematisch:

Aufgabe	Angriff gegen $\neg a$	Verteidigung von $\neg a$
$\neg a$	a	-

-ziemlich gekünstelt. Die Situation wird jedoch klarer, wenn man sich die doppelte Funktion des Konnektors $\neg$ klarmacht.
Soll die Aufgabe $\neg \bigwedge_x a(x)$ verteidigt werden, so läßt sich die pragmatische Funktion von $\neg$ in Verbindung mit dem Allquantor inhalt ich als Aufforderung zur Angabe eines Gegenbeispiels deuten. Soll dagegen z.B. die Aufgabe $a \wedge b$ widerlegt werden, so hat man zu-

nächst mit dem Angriff $a \wedge b$ seitens des Opponenten zu rechnen. O verliert, wenn er wenigstens einer der Lösungsversuche für a, b widerlegbar ist. Genau dann hat aber P die Widerlegung $\neg(a \wedge b)$ von $a \wedge b$ erfolgreich verteidigt. Diese Überlegung beleuchtet die Rolle von $\neg$ als Transformationsoperator logisch zusammengesetzter Aufgaben: $\neg(a \wedge b)$ verteidigen bedeutet, wenigstens eine der Aufgaben a, b zu widerlegen.

6. Behauptet P die Lösung von $a \longrightarrow b$, so übernimmt er die Verpflichtung, b zu beweisen, wenn der Opponent seinerseits a beweisen kann. Nur für den Fall, daß O erfolgreich a verteidigen kann, P dagegen b nicht, soll der Dialog für P als verloren gelten. Inhaltlich läßt sich im Anschluß an Kolmogorov $a \longrightarrow b$ interpretieren als die Aufforderung, die Lösung von b auf die von a zurückzuführen.

Aufgabe	Angriff gegen $a \longrightarrow b$	Verteidigung gegen $a \longrightarrow b$
$a \longrightarrow b$	a	b

Die definierenden Dialogschemata für Negation und Subjunktion wirken im Vergleich zu den anderen Schemata unnatürlich; der Grund hierfür beruht m.E. darauf, daß dies genau die Schemata sind, die das Element der Frage nicht enthalten. Die Vorzüge der dialogischen Methode, nämlich ihre Fortsetzbarkeit zum dialogischen bzw. konventionellen Beweis, ihre heuristische Leistungsfähigkeit, ihre paradigmatische Funktion in Bezug auf allgemeine Argumentationen, sowie die Möglichkeit zur Begründung formallogischer Gesetze, sind jedoch gewichtiger als die genannten, durch Kompromisse überbrückbaren Nachteile.
Zur Lösung der Aufgabe $a \vee \neg a$ (tertium non datur) existiert in der Dialoglogik keine (formale) Beweisstrategie, m.a.W.: die Dialoglogik ist eine nichtaristotelische Logik[1]. Akzeptiert man jedoch das "tertium non datur" oder dazu äquivalente Formen[2] (z.B. $\neg\neg a \longrightarrow a$) so kann man aus den Schemata 1) - 6) unmittelbar die entsprechenden Widerlegungsschemata gewinnen, wenn man nämlich die Fälle berücksichtigt, in denen eine logisch zusammengesetzte Aufgabe gegen Angriffe nicht verteidigt werden kann.
Man erhält dann folgendes Schema:

---

1 Der dialogische Folgerungsbegriff ist äquivalent zum Folgerungsbegriff des intuitionistischen Heyting-Kalküls.

2 Statt eine Gewinnstrategie (Beweisstrategie) für den Proponenten zu fordern, verlangt man nun, daß der Opponent über keine Gewinnstrategie (Beweisstrategie) verfügt.

	Aufgabe	Widerlegung der Aufgabe[1]
1.	$a \wedge b$	$\neg a \vee \neg b$
2.	$a \vee b$	$\neg a \wedge \neg b$
3.	$\bigwedge_x a(x)$	$\bigvee_x \neg a(x)$
4.	$\bigvee_x a(x)$	$\bigwedge_x \neg a(x)$
5.	$\neg a$	a
6.	$a \longrightarrow b$	$a \wedge \neg b$

Die Schemata 1) - 6) können in einer Form wiedergegeben werden, die der Darstellungsweise des konventionellen Beweises näher steht. Wir sprechen dann von Beweis- bzw. Widerlegungsrahmen.[2]

Beweisschema (Beweisrahmen)	Widerlegungsschema (Widerlegungsrahmen)
1. Behauptung: $a \wedge b$ Beweis: ... also gilt a ... also gilt b	Behauptung: $a \wedge b$ Widerlegung: Wahlweise! ... also ist a falsch | ... also ist b falsch

Bemerkung: "..." ist jeweils durch einen korrekten inhaltlichen Beweis (Widerlegung) auszufüllen.

2. Behauptung: $a \vee b$ Beweis: Wahlweise! ... also gilt a | ...also gilt b	Behauptung: $a \vee b$ Widerlegung: ... also ist a falsch ... also ist b falsch
3. Behauptung: $\bigwedge_x a(x)$ Beweis: Sei x beliebig, aber fest ... also gilt a(x)	Behauptung: $\bigwedge_x a(x)$ Widerlegung: Man wähle speziell das Element x_0... Man sieht somit, daß $a(x_0)$ falsch ist, und die Behauptung ist widerlegt.
4. Behauptung: $\bigvee_x a(x)$ Beweis: Wähle speziell das Element x_0... somit gilt $a(x_0)$	Behauptung: $\bigvee_x a(x)$ Widerlegung: Sei x beliebig aber fest ... also ist a(x) falsch.

---

1 Die Widerlegung ist nun eine idempotente Operation.

2 E. Wittmann verwendet Beweis- und Widerlegungsrahmen in seinen Vorlesungen.

5. Behauptung: $\neg a$
   Beweis: Widerlege a!
   (Etwa durch Angabe eines Gegenbeispiels)

   Behauptung: $\neg a$
   Widerlegung: Beweise a! (Widerlege $\neg\neg a$ durch ein Gegenbeispiel)

6. Behauptung: $a \longrightarrow b$
   Beweis: Wahlweise!
   Widerlege (falsifiziere)
   a | aus der Annahem der Gültigkeit von a beweise b

   Behauptung: $a \longrightarrow b$
   Widerlegung:
   ... also gilt a
   ... also ist b falsch

Diese Schemata sprechen für sich selbst und bedürfen keiner weiteren Erläuterungen.

6. Vorschläge zur Einübung und Anwendung logischer Handlungsschemata

Im folgenden soll anhand von Beispielen gezeigt werden, wie die Einübung und Anwendung logischer Handlungsschemata auf breiter, fächerübergreifender Basis erfolgen kann. Zunächst lassen wir den Aspekt des Beweises in den Hintergrund treten, statt dessen beschäftigen wir uns mit der Aufgabe, logisch verknüpfte Merkmale aus außermathematischen Bereichen zu identifizieren (Beispiel zur Identifizierung mathematischer Merkmale wurden im 2. Abschnitt besprochen, ein weiteres Beispiel findet sich im Unterabschnitt c). Danach werden Möglichkeiten für logische Schulung und die Präfiguration des Begriffs "Beweisstrategie" im Rahmen der elementaren Arithmetik aufgezeigt. Die hierbei gewonnenen Einsichten lassen sich auf symbolischer Stufe zum Beweis in dialogischer bzw. konventioneller Form fortsetzen. Am Ende des Kapitels stehen Ansätze zur formalen Logik.

a) Identifikation von Merkmalen

Merkmale von Gegenständen werden durch ein- oder mehrstellige Prädikatoren bezeichnet. Trifft das durch den n-stelligen Prädikator a bezeichnete Merkmal auf die Gegenstände (mit den Namen) $x_1, \ldots, x_n$ zu[1] (nicht zu), so schreiben wir: $a(x_1, \ldots, x_n)$,
(bzw. $\neg a(x_1, \ldots, x_n)$).

N. Landa hat in zahlreichen Arbeiten über das Lösungsverhalten von Schülern bei grammatikalischen Aufgaben herausgefunden, daß die Versuchspersonen zwar die Definitionen grammatikalischer Begriffe kennen, jedoch nicht in der Lage sind, diese auch anzuwenden. Nach der Meinung Landas liegt dies daran, daß die Schüler nicht über geeignete Identifizierungsalgorithmen - die von der logischen Struktur der Definitionen abhängen - verfügen.

Beispiel[2].

Definition: Als nebengeordnet bezeichnet man Satzglieder, die auf die gleiche Frage antworten und sich auf dasselbe Satzglied beziehen.

$n(x, y)$: die Satzglieder x, y sind nebengeordnet
$a(x, y)$: die Satzglieder x, y antworten auf die gleiche Frage
$b(x, y)$: die Satzglieder x, y beziehen sich auf dasselbe Satzglied.

---

1 $(x_1 \ldots, x)$ bezeichnet ein geordnetes n-Tupel.

2 Vgl. N. Landa (1969) S. 209

Dann kann man die Definition formal schreiben:

$$n(x, y) :\Longleftrightarrow a(x, y) \wedge b(x, y)$$

Aufgabe: Analysiere den Satz "Die Mädchen spielen auf der Wiese, und die Jungen baden im See" auf nebengeordnete Satzglieder!

Landa führt den folgenden, leicht modifizierten Dialog zwischen Lehrer (L) und Schüler (S) an.

S : "Bei den Prädikaten "spielen" und "baden" handelt es sich um nebengeordnete Satzglieder."
L : "Bist du überzeugt, daß es nebengeordnete Satzglieder sind?"
S : "Ja"
L : "Erinnere dich, was wir als nebengeordnete Satzglieder bezeichnen."
(S antwortet korrekt mit der Definition)
L : "Richtig. Beziehe nun diese Definition auf die Wörter "spielen" und "baden".
(S schweigt)
L : "Antworten diese Wörter auf die gleiche Frage?"
S : "Sie antworten auf die gleiche Frage."
L : "Kann man also sagen, daß sie nebengeordnet sind?"
(S schweigt)
L : "Beziehen sie sich auf das gleiche Satzglied?"
S : "Nein"
L : "Sind sie also nebengeordnete Satzglieder?"
S nach einer Pause und zerstreut: "Ich weiß es nicht".

Offenbar ist jener Schüler blind gegenüber der pragmatischen Funktion des Konnektors "und".
Schematisch kann der obige Dialog in folgender, die logische Struktur deutlicher wiedergebender Form dargestellt werden.

Lehrer (Opponent)	Schüler (Proponent)
	1. n (spielen, baden)
2. Nenne die Definition von n(x, y) !	3. $n(x, y) \Longleftrightarrow a(x, y) \wedge b(x, y)$
4. a (spielen, baden) ? | b (spielen, baden)?	5. $a_{(\text{spielen}, \text{baden})}$ | $\neg$b (spielen, baden)

Hätte der Schüler über das zu $a \wedge b$ gehörende Widerlegungsschema $\neg a \vee \neg b$ verfügt, könnte er möglicherweise durch seine vorletzte Antwort (im Schema "5") doch noch zu einer richtigen Lösung der Aufgabe gefunden haben.

Die Einübung des zum Konnektor "und" gehörenden dialogischen Handlungsschemas soll exemplarisch erfolgen. Beispiele aus verschiedensten Bereichen finden sich wie das weitere zeigt, mühelos.

Um für Satzglieder x, y die Eigenschaft "nebengeordnet" nachzuweisen, sind folgende Handlungen zu vollziehen:

a) Handlung inhaltlicher Natur: Rekapitulierung der Definition der Eigenschaft "nebengeordnet".

b) Handlungen logischer Natur:

i) Erschließung der logischen Struktur der Merkmale und Hervorhebung der logischen Konnektoren.

ii) Frage- und Antworthandlungen[1] ("Merkmal-checking"):

α) Trifft das Merkmal a(x, y) zu? Wenn nicht, wird die Überprüfung der Merkmale abgebrochen und der negative Schluß gezogen; n(x, y) ist widerlegt.

β) Trifft a(x, y) zu, so ist zu fragen:
Trifft das Merkmal b(x, y) zu? Ist es nicht vorhanden, so ist n(x, y) widerlegt. Ist es vorhanden, so ist n(x, y) bewiesen.

An Beispielen muß den Lernenden der Eindruck vermittelt werden, daß bei konjunktiv verknüpften Merkmalen tatsächlich die Überprüfung sämtlicher Merkmale erforderlich ist. Anders ausgedrückt: der Lernende soll mit dem Konnektor "und" die Aufforderung zur Überprüfung sämtlicher konstituierender Merkmale verbinden, weil er ja von einem Opponenten - in dessen Rolle er für einen Augenblick steigt - nach sämtlichen Eigenschaften gefragt werden könnte.

Das o.a. Frage-Antwortschema kann selbstverständlich auch in der stilisierten Form eines Flußdiagramms mitgeteilt werden.

Ein Beispiel aus der Biologie.

Ein Ziel des Biologieunterrichts ist die Vermittlung charakteristischer Merkmale von Tieren und Pflanzen, die ihre Bestimmung in der Natur erlauben.

---

1 Es kommt natürlich nicht auf die Reihenfolge der überprüften Merkmale an.

Am Beispiel der Definition von "Lippenblütler" soll gezeigt werden, daß die mit logischen Konnektoren verknüpften Handlungsschemata auch im Biologieunterricht bewußt gemacht werden können.
Definition. Lippenblütler sind Kräuter oder Sträucher mit vierkantigem Stengel, gegenständigen Blättern, zweilippigen Blüten und vierteiligen Spaltfrüchten mit nußartigen Früchtchen.

a(x) : die Pflanze x ist Lippenblütler
b(x) : " " x ist ein Kraut
c(x) : " " x ist ein Strauch
d(x) : " " x besitzt einen vierkantigen Stengel
e(x) : " " x hat gegenständige Blätter
usw.

Logische Struktur der Definition:

$$a(x) :\Longleftrightarrow (b(x) \vee c(x)) \wedge d(x) \wedge e(x) \wedge \ldots$$

Aufgaben: Welche Pflanzen kommen als Lippenblütler in Frage? Begründung! Gib Beispiele von Pflanzen, die nicht Lippenblütler sind! Nenne Beispiele für Sträucher (Kräuter), die nicht Lippenblütler sind!
Auf welche Merkmale mußt du achten, um Lippenblütler zu bestimmen?

Beispiele aus den Bereichen Geschichte und Kunstgeschichte.
Sehr deutlich kommt die Abhängigkeit der Identifizierungshandlungen von der logischen Struktur in der Geschichte zum Ausdruck.
Der Begriff Königin wird folgendermaßen definiert.
"Königin: Gattin eines Königs oder selbständige Herrscherin."

a(x) : Person x ist Königin
b(x) : Person x ist weiblichen Geschlechts
c(x) : Person x ist mit einem König verheiratet
d(x) : Person x herrscht selbständig

Dann lautet die Definition

$$a(x) :\Longleftrightarrow b(x) \wedge (c(x) \vee d(x))$$

Die logische Struktur dieser Definition beeinflußt nun unmittelbar die Handlungen eines Historikers, der eine geschichtliche Person als Königin identifizieren will. Die methodische Anlage seines

Quellenstudiums oder anderer historischer Verfahren wird durch die logische Struktur bestimmt.

Auch anhand folgender Fragestellung im Geschichts- oder Sozialkundeunterricht kann in Verbindung mit inhaltlichen Problemen die Verwendung logischer Partikel bewußt gemacht werden.

Es werde etwa die Aufgabe gestellt, zu entscheiden, ob es sich bei den Herrschaftsformen in den Ländern A, B, C ... um Diktaturen handelt.

Unter Diktatur als Herrschaftsform versteht man die Zusammenfassung der politischen Gewalt in einer Hand (eines Diktators oder einer Gruppe) unter rechtmäßiger oder gewaltsamer Ausschaltung gewohnheits- oder verfassungsmäßiger Schranken.

Frage: Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eine Herrschaftsform nicht Diktatur ist?
Unter welchen "Grenzbedingungen" können andere Herrschaftsformen in eine Diktatur übergehen?

Bei einer Exkursion soll festgestellt werden, ob in der besichtigten Kirche eine Apsis vorhanden ist. Wonach haben die Betrachter zu suchen?

"Apsis" ist definiert als halbrunde oder vieleckig gebrochene Nische in der Abschlußwand des Langhauses oder Seitenschiffs einer Kirche.

Mit den Abkürzungen:

a(x) : Nische x ist Apsis
b(x) : Nische x ist halbrund
c(x) : Nische x ist vieleckig gebrochen
d(x) : Nische x ist in der Abschlußwand des Langhauses
e(x) : Nische x ist in der Abschlußwand eines Seitenschiffes

erhält man die formale Darstellung

$$a(x) :\Longleftrightarrow (b(x) \vee c(x)) \wedge (d(x) \vee e(x))$$

Beispiel aus der Chemie.

"Unter Oxidation im engeren Sinne versteht man die Aufnahme von Sauerstoff oder den Entzug von Wasserstoff."

Zum Nachweis, daß es sich bei einer bestimmten chemischen Reaktion um einen Oxidationsvorgang (i.e.s) handelt, genügt der analytische Nachweis (bzw. das Erkennen in der Reaktionsgleichung) mindestens eines der Prozesse: Aufnahme von Sauerstoff bzw. Entzug von Wasserstoff.

Um dagegen nachzuweisen, daß es sich bei einer chemischen Reaktion nicht um eine Oxidation (i.e.S.) handelt, ist der Nachweis zweier Prozesse notwendig: die Reaktion ist nicht mit Sauerstoffaufnahme verbunden, die Reaktion ist nicht mit dem Entzug von Wasserstoff verbunden.
Natürlich lassen sich die zur Lösung der Aufgabe "Ist der chemische Prozeß A ein Oxidationsvorgang?" erforderlichen Analysenhandlungen in einem Analyseschema, etwa einem Flußdiagramm, darstellen.
Manche Lehrer versuchen, durch Analyse von Zeitungen unter sprachlichen, politischen, soziologischen, mathematischen Aspekten ihren Unterricht praxisbezogener zu gestalten. Die folgenden Beispiele zeigen Möglichkeiten für die logische Schulung in Verbindung mit dem sozialkundlichen Thema "Der Stellenmarkt - wie liest oder verfertigt man Stellenannoncen".

"... Sekretärin mit guten englischen und französischen Sprachkenntnissen gesucht."

Aufgaben: Jutta ist Sekretärin und besucht seit einem halben Jahr einen Kurs der VHS in Englisch und Französisch. Wird sie sich auf die Annonce bewerben können?
Ria hat gerade Abitur gemacht und spricht fließend Englisch und Französisch. Kommt sie für die Stellung in Frage?
Julia hat als Fremdsprachensekretärin für Englisch gearbeitet. Französischkenntnisse besitzt sie nicht. Sie will sich beruflich verändern.

"... sucht für das Rechnungswesen Kostenrechner. Diese interessante Tätigkeit setzt Kenntnisse in der Betriebsabrechnung oder Kalkulation voraus."
Welche Qualifikationen muß ein Bewerber für diese Stellung mitbringen? Wann wird ein Bewerber - wenn es nur auf die im Inserat genannten Merkmale ankommt - sicher nicht eingestellt?

"Wir suchen kaufmännische Mitarbeiterin (Höchstalter 3o Jahre) für die Verschlüsselung von Befragungsunterlagen, die als Verkäuferin im Lebensmittel- oder Textilsektor beschäftigt war."
Auf welche Merkmale sind bei diesem Inserat zu achten?

Welche Qualifikationen werden vorausgesetzt? Muß eine 4ojährige Bewerberin als Verkäuferin in der Textil- und Lebensmittelbranche gearbeitet haben?

b) Einübung und Anwendung logischer Handlungsschemata bei komplexen arithmetischen Aussagen. Präfiguration des Begriffs Beweisstrategie.

Die bisherigen Beispiele zur Pragmatik logischer Konnektoren entstammten außermathematischen Bereichen. Die Beispiele des vorliegenden Abschnitts beziehen sich auf doe Arithmetik, insbesondere die Teilbarkeitslehre. Arithmetische Prädikatoren[1] wie gerade, ungerade, n-teilbar, prim, relativ prim werden operativ, d.h. durch Handlungsschemata definiert. Diese Handlungsschemata operieren auf konkret durch Spielmarken, oder ikonisch durch "Kringel" oder andere Grapheme dargestellten Zahlen[2]. Damit gewinnt man einen definiten Beweisbegriff, der außerdem eine Korrespondenz zwischen logischen Konnektoren als sprachlichen Gebilden, und "praktischen Konnektoren"[3] auf der Ebene materieller oder materialisierter Handlungen etabliert.

Die Methode, arithmetische Aussagen durch Operationen mit Rechensteinen zu beweisen, geht auf die griechische Mathematik zurück. O. Becker schreibt: "In der Frühzeit der griechischen Mathematik gibt es eine merkwürdige, halb arithmetische, halb geometrische Betrachtungsweise, die Figuren aus Steinchen (psephoi) gleicher Form und Größe (rund oder quadratisch) zusammensetzt und daran arithmetische Untersuchungen anknüpft." [4] Becker rekonstruiert in seinen Untersuchungen z.B. einen Beweis des Euklidischen Satzes über vollkommene Zahlen, der allein auf der Lehre vom Geraden und Umgeraden beruht. Die Sätze dieser im Vergleich zu Euklids Satz primitiven Theorie hat man nach Becker zweifelsfrei mit Rechensteinen bewiesen. Darauf deutet, so Becker, ein Dialogfragment des Epicharm[5]:

A. "Wenn einer zu einer ungeraden Zahl, meinetwegen auch einer geraden, einen Stein zulegen oder auch von den vorhandenen einen wegnehmen will, meinst du wohl, sie bliebe noch dieselbe?"

B. "Bewahre!"

---

1 Man kann genauso gut von Merkmalen sprechen.

2 Vgl. den in Wittmann (1971)$_1$ S. 44 f vertretenen Standpunkt

3 Vgl. K. Lorenz (1971) S. 239 f

4 O. Becker (1957) S. 4o

5 O. Becker (1965) S. 129

Die im folgenden operativ definierten Prädikatoren sollten im Unterricht exemplarisch, d.h. durch Beispiele und Gegenbeispiele, eingeführt werden.

Definition 1. Die durch a Spielmarken dargestellte Zahl a heißt gerade, wenn sich die Marken in einem Rechteckschema ("2-Rechteck") mit genau 2 Zeilen anordnen lassen.

Definition 2. Die Zahl a heißt ungerade, wenn sie sich nicht als 2-Rechteck darstellen läßt, oder wenn sie sich von einer geraden Zahl um eine Einheit unterscheidet[1].

Definition 3. Die Zahl a heißt n-teilbar, wenn sie sich als n-Rechteck mit genau n Zeilen darstellen läßt.
Diese Definition sollte sich im Unterricht als Verallgemeinerung konkreter Fälle (2-teilbar, 3-teilbar, ...) ergeben.

Definition 4. Eine Zahl a heißt prim, wenn sie sich nur als a-Rechteck oder 1-Rechteck darstellen läßt.

Die elementaren Rechenoperationen Addition, Subtraktion (falls diese sinnvoll ist), Multiplikation können durch die Operationen des Zusammenfügens, Ausgliederns, Reproduzierens, beschrieben werden.
Zur Einübung bzw. Anwendung der pragmatischen Funktion der Konnektoren "und" "oder", "wenn-dann" dient folgendes Spiel.
Auf der Flanell- oder Magnettafel (oder auf Karton) sind sog. Satz-Rahmen (genauer: Elementarsatz-Rahmen) vorbereitet.

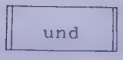
	ist	

Feld 1 wird mit dem Namen eines Gegenstandes bzw. dem Gegenstand selbst, oder einer geeigneten Repräsentation des Gegenstandes belegt.
Feld 2 enthält den Prädikator (Merkmal) der dem Gegenstand zugesprochen wird.
"ist" fungiert als Kopula.
Satz-Rahmen können durch Konnektoren - die ein "Konnektor-Rahmen" enthält - verbunden werden[2].

---

1 Diese Definition ist griechischen Ursprungs vgl.O.Becker (1957) S. 47. Im Unterricht kann man die Äquivalenz beider Charakterisierung als Beweisübung stellen.

2 Die Art der Bindung kann durch räumliche Anordnung sichtbar gemacht werden.

z.B. 

bzw.

Feld 1 wird durch Zahlen - hier: Kollektionen von Spielmarken - belegt.

Beispiel

Es stehen außerdem die folgenden "Angriffs-Rahmen" zur Verfügung:

Ein erstes Spiel beschäftigt sich allein mit der konjunktiven bzw. disjunktiven Verknüpfung von Aussagen. Ein Spiel mit Implikation wird anschließend erörtert.

Das erste Beweisspiel verläuft folgendermaßen:

Einer von zwei Spielern entnimmt einer Urne Kollektionen von Spielmarken, die er auf die Felder 1,1' verteilt[1] (die Prädikatoren seien etwa bereits gewählt). Jeder der beiden Spieler übernimmt jeweils für eine gewisse Anzahl von Spielrunden die Rolle des Proponenten bzw. Opponenten.

Enthält das Konnektor-Feld "und", so muß der Opponent angreifen, indem er die Angriffsrahmen "links?", "rechts?" setzt. Dies verpflichtet den Proponenten, die entsprechenden links bzw. rechts von "und" stehenden Aussagen effektiv (d.h. durch äußere Handlungen) zu beweisen. Kann (P) der Proponent beide Angriffe des Opponenten abwehren (oder macht der Opponent beim Angriff Fehler gegen die Angriffsregel), so hat er gewonnen; andernfalls gewinnt der Opponent.

Die Spielregel für "oder" wird ebenfalls entsprechend der dialogischen Verwendung dieses Konnektors festgesetzt.

Das Spiel kann auch als Einpersonenspiel durchgeführt werden und dient dann der Verinnerlichung der dialogischen Handlungsschemata.

Beim Spiel mit Implikation (vgl. Beispiel) wird verabredet, daß auf Feld 1'' Summe (Produkt, Differenz (falls sinnvoll)) der auf 1 und 1' befindlichen Spielmarken gesetzt wird (etwa durch die Methode der Reproduktion). Als neue Spielregel kommt hinzu: der Opponent muß die

---

1 "blindes" Verteilen!

Steht a(2) für das Prädikat: Zahl a ist 2-teilbar, so soll nun am Beweis der Aussage $\bigwedge_a \bigwedge_b a(2) \wedge b(2) \longrightarrow (a + b)(2)$ die Verwendung des Allquantors und der Strategiebegriff eingehender erläutert werden.

O gibt nach eigener Wahl Zahlen a_o, b_o vor, sodann ist P verpflichtet, die Implikation $a_o(2) \wedge b_o(2) \longrightarrow (a_o + b_o)(2)$ zu setzen (dieses "Setzen" kann wie im ersten Spiel dieses Abschnitts realisiert werden).

Sodann beginnt das bereits bekannte Spiel um die Implikation. Da die einzige Gewinnchance für den O darin besteht, die Prämisse erfolgreich verteidigen zu können, ist anzunehmen, daß er für a_o, b_o geraden Zahlen wählt. P macht sich diese von O abfragbare Information unter Anwendung der Operation "Zusammenfügen" zunutze; seine Strategie besteht darin, daß er allein die von O gegebenen wesentlichen Informationen aufgreift und zum Beweis verwendet.

Führt P bei gegebenen geraden Zahlen stets dieselben Umordnungsoperationen aus, so ist er gegen beliebige Angriffe des O gewappnet - er verfügt über eine produktiv-konkrete[1] Beweisstrategie (im Gegensatz zu einer durch Variablen mitgeteilten produktiv-formalen Strategie, einem formalen Beweisschema).

Zusammenfassend kann man sagen, daß die didaktischen Maßnahmen zur Einübung der Verwendung des Allquantors so gerichtet sein müssen, daß der Lernende mit dem "für alle ... gilt" die Aufforderung zur Angabe einer Beweisstrategie verbindet.

Die bisherigen Überlegungen, die bis zur Entwicklung von Beweisstrategien auf der produktiv-konkreten Ebene führten, sollten im Sinne des Spiralprinzips etwa in der Sekundarstufe I erneut aufgegriffen und vertieft werden.

Im folgenden sind dazu einige Anregungen zusammengestellt, wobei die auf den Seiten angeschnittenen Probleme m.E. auch für die Sekundarstufe II geeignet sind.

Dennoch könnte gerade beim Beweis arithmetischer Aussagen der methodische Versuch unternommen werden, zu einer sog. halbformalen Darstellung von Beweisschemata zu gelangen, die ikonische wie auch symbolische Elemente miteinander verbindet.

---

1 Dieser Terminus stammt von H.-J. Vollrath vgl. S.163f.

Dazu muß bei der Bearbeitung der Einzelfälle klar herausgearbeitet werden, worauf es für die Beweisstrategie ankommt; hier: Herstellung zweier ("und"!) 2-Rechtecke. Sind beide Zahlen $a_\circ$, $b_\circ$ gerade, so lassen sie die Darstellung zu[1]:

Der Aspekt des Halb-Formalen wird dadurch zum Ausdruck gebracht, daß von der Spaltenzahl (Kofaktor zu 2) abstrahiert wird. Diesen Schritt deuten die Punkte an.

Vielleicht gelangen manche Schüler zur Vermutung, daß sich die zum Beweis von 1) $\bigwedge_a \bigwedge_b a(2) \wedge b(2) \longrightarrow (a+b)(2)$ verwendete Gewinnstrategie auch im Falle z.B. der 3-Teilbarkeit bewährt. Um diese möglicherweise vorhandenen Ansätze zu verstärken, behandelt man 1) als erzeugendes Problem und fordert die Schüler auf, 1) zu modifizieren. Die wesentlichen Aufgabenparameter sind: Logischer Konnektor, Teilbarkeitsprädikator, arithmetische Operation. Wie die folgenden Beispiele zeigen, stellt diese Fragestellung eine Herausforderung an die Schüler dar, die zu interessanten Aufgaben führt.

2) $\bigwedge_a \bigwedge_b a(2) \wedge b(2) \longrightarrow (ab)(2)$ 3) $\bigwedge_a \bigwedge_b a(2) \wedge b(2) \longrightarrow (a-b)(2)$

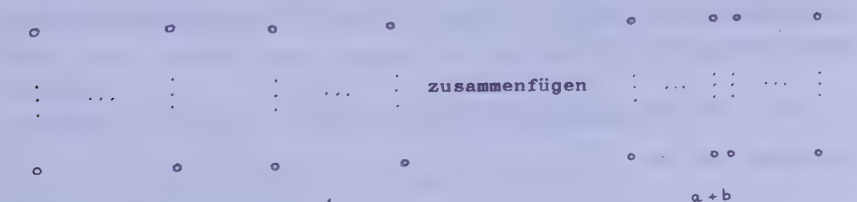
4) $\bigwedge_a \bigwedge_b a(2) \vee b(2) \longrightarrow (a+b)(2)$ 5) $\bigwedge_a \bigwedge_b a(2) \vee b(2) \longrightarrow (ab)(2)$ etc.

6) $\bigwedge_a \bigwedge_b a(3) \wedge b(3) \longrightarrow (a+b)(3)$ 7) $\bigwedge_a \bigwedge_b a(4) \wedge b(4) \longrightarrow (a+b)(4)$ etc.

Die Aufgaben 1), 6), 7) kann man unter dem Aspekt der Generalisierung eines Beweisschemas (einer Beweisstrategie) behandeln. Sie repräsentieren den Beweis für

$\bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_n a(n) \wedge b(n) \longrightarrow (a+b)(n)$ auf produktiv-konkretem Niveau.

In halbformaler Darstellung lautet das Beweisschema



---

1 Nötigenfalls mit einer Zusatzbemerkung über die Anzahl der Spalten, um Fallunterscheidungen zu umgehen.

In der folgenden Aufgabe sollen die bisherigen Kenntnisse in Verbindung mit der Lehre vom Geraden und Ungeraden angewendet werden.

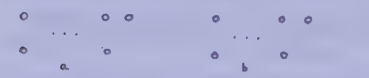
Beweise!

1. a sei gerade und b sei gerade, dann ist ihre Summe gerade.
2. a sei gerade (bzw. ungerade, verschieden von 1) und b unterscheide sich von a um eine Einheit, dann ist b ungerade (gerade).
3. a sei ungerade und b sei ungerade, dann ist ihre Summe gerade.
4. a sei gerade und b sei gerade, dann ist ihr Produkt gerade.
5. a sei gerade und b sei ungerade, dann ist ihr Produkt gerade.
6. a sei ungerade und b sei ungerade, dann ist ihr Produkt ungerade.

Bemerkungen: Die Aufgaben brauchen nicht vollständig vorgegeben sein, so könnte man z.B. den 3. Prädikator jeweils vermuten lassen. Je nach den Voraussetzungen seitens der Schüler wählt man das produktiv-konkrete oder halbformale Nachweisniveau. Die Aufgaben bieten Gelegenheit, an einem elementaren Gegenstand die Methode des lokalen Ordnens zu üben.

Beispiel zur Lösung von 6. (halbformal)

Der Konnektor "und" fordert zur Erstellung der beiden Zahlenschemata



auf.

Nun wird a b-mal reproduziert:

b-mal

Ausgliederung der jeweils rechts stehenden Punkte und deren Zusammenfassung ergibt b:

b kann aber dargestellt werden in der Form (s.o.)

Insgesamt hat man

Zusammenfügen ergibt , das Produkt ist nach Definition 2 ungerade.

Wir kommen nun zu einigen schwierigeren Problemen, die man in voller Breite evtl. am Ende der Sekundarstufe aufgreifen könnte.

Beweise! Wenn eine ungerade Zahl n eine gerade Zahl g teilt, so teilt sie auch deren Hälfte.

Der Beweis werde zunächst auf produktiv-konkretem Niveau n = 3, g = 12 geführt, um die Beweisstrategie transparent zu machen. Entfernt man von einer Figurenkonstellation einen Teil, so möge der verbleibende Rest kurz als Rumpf bezeichnet werden.
Die Voraussetzung garantiert die beiden Schemata

12 ist 3-teilbar 12 ist gerade

Entfernt man die (z.B.) unterste Zeile des ersten Rechtecks, so ist der Rumpf gerade.
Der Rumpf stimmt daher mit einem Teilrechteck des rechten 2-Rechtecks überein.
Daher muß die Zeile des ursprünglichen Rechtecks gerade sein.
Das erste Rechteck kann folgendermaßen gebündelt

, und daher in ein 6-Rechteck

umgewandelt werden.

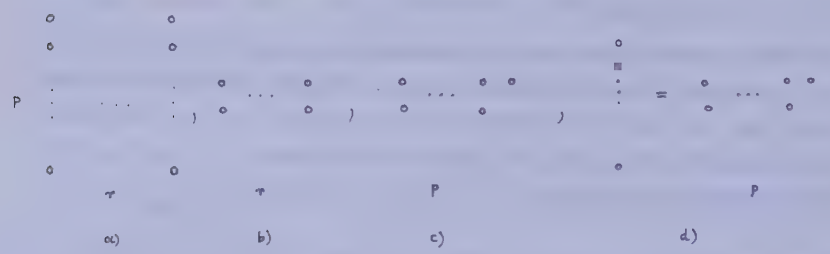
Man sollte keinesfalls versäumen, den Beweis auch für andere konkrete Fälle durchzuspielen (u.a. für andere Werte von n!), da die resultierenden Probleme eine integrative Funktion[1] in Bezug auf das Gebiet des Geraden-Ungeraden erfüllen. Einzeln "verstreutes" Wissen gelangt bei der Lösung eines Problems in einem sinnvollen Kontext zur Anwendung; damit erweist sich gleichzeitig die Nützlichkeit des bisher Gelernten.
Der o.a. Satz ist Spezialfall des folgenden Satzes S:

$$\bigwedge_p \bigwedge_q \bigwedge_r p \mid r \wedge q \mid r \wedge (p, q) = 1 \longrightarrow pq \mid r$$

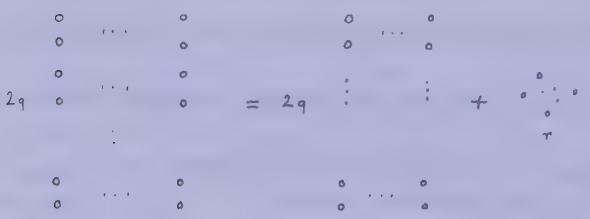
---

1 Auf die Funktion integrierender Probleme gehen wir an anderer Stelle in Verbindung mit Themen der Analysis ein.

Am Spezialfall q = 2, p ungerade, soll das Beweisschema gezeigt werden. Nach Voraussetzung existieren für r bzw. p die folgenden Darstellungen.

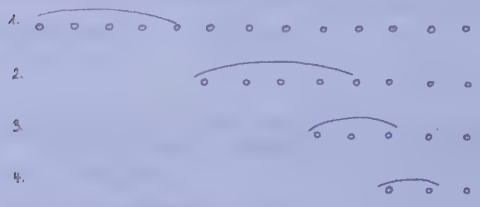


Die linke Seite von d) wird mit r (Schema b), die rechte Seite von d) mit r (Schema a)) multipliziert; Ergebnis:



Der Vergleich beider Gleichungsseiten ergibt die Darstellung von r als 2q - Rechteck. Wesentlicher Gedanke des Beweises ist die charakteristische Zerlegung von 1 für relativ prime Zahlen.
Sind p und q teilerfremd, so gibt es eine Darstellung[1] der Form pa = qb + 1. Ist eine solche Zerlegung gefunden, so kann man das obige Beweisschema unmittelbar übertragen.
Somit bleibt das Problem, auf operativem Weg den größten gemeinsamen Teiler, sowie eine entsprechende Zerlegung der 1 zu finden.
Ist p > q, so gewinnt man operativ sofort die Beziehung (p - q, q) = (p, q), welche die Ermittlung von ggT (p, q) ermöglicht.

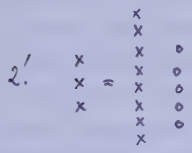
Beispiel: ggT (13,5)



1 Evtl. Umbenennung

Das Verfahren wird stationär, ggT (13,5) = 1
Um zu einer Zerlegung der 1 zu kommen, interpretiert man die Zeilen 1. - 4. als Gleichungen

Beispiel: 2. Zeile



Der überstrichene Teil der 2. Zeile wird durch "x" dargestellt ("Substraktion").

Außerdem werden folgende Transformationsregeln benötigt:

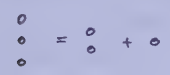
a) Werden alle "o" einer Gleichung durch "x" ersetzt (oder umgekehrt), so müssen alle "x" durch "o" ersetzt werden (und umgekehrt).

b) Eine o-Spalte kann auf die andere Seite einer Gleichung als x-Spalte gebracht werden (und umgekehrt).

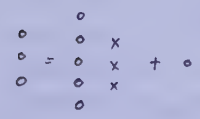
Wendet man a) auf 2 an, so ergibt sich:

Die Bestimmung der gewünschten Zerlegung von 1 erfolgt iterativ, das Schema zur Bestimmung des ggT wird in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen.

Die letzte Zeile 4) liefert eine Gleichung:

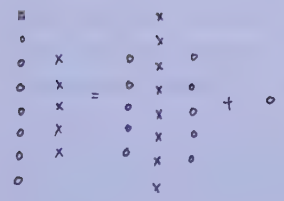


Nun wird unter Verwendung von 3) ersetzt.

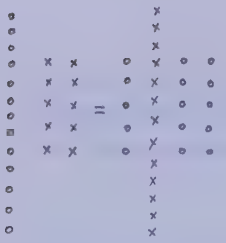


ersetzt man mit Zeile 2

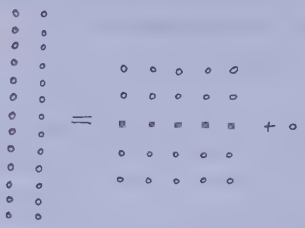
wird durch die aus Umformung von Zeile 2 gewonnene Figur 2 ersetzt.



Aus Zeile 1 und Anwendung von a)



Anwendung von b) liefert die Zerlegung:



Ein abschließendes Beispiel betrifft die Anwendung der pragmatischen Funktion logischer Konnektoren in Verbindung mit Teilbarkeitskriterien.

Um die Teilbarkeit einer Zahl a durch die Zahl n aufgrund eines Teilbarkeitskriteriums zu entscheiden, müssen mit a gewisse Operationen, wie z.B. Quersummenbildung (Q_q), Division der aus den letzten beiden Ziffern von a gebildeten Zahl durch 4, etc. vollzogen werden. Aus bekannten Teilbarkeitskriterien kann man sich neue konstruieren (z.B. für 6, 12, 8 etc.).

Teilbarkeit durch 12 läßt sich charakterisieren durch

$$\overset{a}{\wedge}\ a(12) \longleftrightarrow a(3) \wedge a(4)$$

Aufgabe. 1. Beweise oder widerlege 534228 (12).

a) 534228 (3) ? b) 534228 (4) ?

Kontrolliere das Resultat durch Division mit 12.

2. Führe dieselben Überlegungen durch für die Zahlen

2142, 2124, 2324, 3142

3. Wie kann a(12) widerlegt werden? Finde Beispiele und begründe!

4. Welche Handlungen sind zur Widerlegung von a(12) erforderlich?

c) Beweis komplexer Aussagen auf symbolischer Stufe

α Der dialogische Beweis

Der vorangehende Abschnitt beschäftigte sich mit der Erläuterung des Begriffes Beweisstrategie an einigen elementaren Beispielen; dabei wurden Möglichkeiten aufgezeigt, diesen Begriff auf enaktiver bzw. ikonischer Repräsentationsstufe vorzubereiten. Der vorliegende Abschnitt ist dem dialogischen Beweis in der symbolischen Darstellungsebene gewidmet, wie er in mehreren Arbeiten von H.-J. Vollrath erörtert worden ist[1].

Vollrath beklagt, daß in bezug auf das Beweisen die Schule in der Vergangenheit weitgehend kapituliert hat und versucht, die bisherige Konzeptlosigkeit des Beweislehrens mit dem dialogischen Beweis zu überwinden[2].

Beim Beweislehren müssen nach Vollraths Auffassung die folgenden Probleme beachtet werden.

1. Problem der Motivation
2. Problem der Formalisierung
3. Problem der Beweisfindung - als heuristisches Problem
4. Problem der Kenntnis logischer Regeln und Techniken.

Im ersten Problem ist der affektive Bereich angesprochen. Die Motivation des Beweises als Gewinnstrategie in einem Dialog erscheint Vollrath natürlicher als die über das Geltungsproblem. Der Schüler, so schreibt er, "steht häufig in Situationen, die es für ihn als wünschenswert erscheinen lassen, eine Gewinnstrategie zu besitzen. Man denke nur an Diskussionen mit Eltern, Lehrern, Polizisten usw., an Wettkämpfe oder Glücksspiele."[3]

Wie bereits im vorangehenden Abschnitt betont, ermöglicht die operative Interpretation des Allquantors eine Variation der Nachweisebene und damit Abstimmung auf die Leistungsfähigkeit der Schüler. Die Nachweisebene kann nach Vollrath im Dialog in die produktiv-konkrete bzw. produktiv-formale Stufe differenziert werden. Beweisdialoge lassen sich auf enaktiver Repräsentationsstufe produktiv-konkret, auf ikonischer Repräsentationstufe produktiv-konkret bzw. halbformal

---

1 Vgl. H.-J. Vollrath (1967, 1968, 1969)

2 Vgl. H.-J. Vollrath (1969) S. 33 f

3 a.a.O. S. 34

durchführen. Der vorangehende Abschnitt zeigte, daß sich die von Vollrath vorgeschlagene, auf symbolischer Ebene angesiedelte dialogische Beweisform von langer Hand in den beiden anderen Darstellungsmodi vorbereiten läßt.

Die heuristische Leistungsfähigkeit von Beweisdialogen liegt, wie die Beispiele von Vollrath erkennen lassen, in der Möglichkeit, beim Beweis von Allaussagen zunächst Spezialfälle zu untersuchen - was wegen der operativen Definition des Allquantors zulässig ist - um daraus Informationen für eine Beweisstrategie zu gewinnen. Ganz allgemein erfüllen die logischen Konnektoren insofern eine heuristische Funktion, als das Erkennen ihrer pragmatischen Funktion die Struktur von Aufgabenlösungshandlungen bestimmt.

Obwohl Vollrath betont, daß Dialoge auch gewisse logische Techniken und die Kenntnis logischer Regeln voraussetzen, behandelt er die Verbindung zwischen der logischen Struktur zu beweisender Aussagen und der dialogischen Beweisstruktur in mehr intuitivem Sinn. Von Vollrath angeführte Beispiele logisch richtiger Argumentationen sechs- bis siebenjähriger Kinder deuten darauf hin, daß er der Meinung zu sein scheint, dialog-logisches Argumentieren würde durch Argumentationen des Alltags erlernbar sein, so daß bei Schülern ein intuitives Verständnis dialog-logischer Regeln vorausgesetzt werden könne. Die Möglichkeit, die Verwendung und die pragmatische Funktion logischer Partikel im Zusammenhang mit dialogischen Beweisen zu demonstrieren, bleibt daher weitgehend ungenutzt. Gerade dieser Aspekt dialogischer Beweisverfahren soll im folgenden stärker hervorgehoben werden.

Zur Illustration dialogischer Beweisverfahren bringt Vollrath den Beweis der Aussage:

"Jede ungerade Zahl läßt sich als Differenz aufeinanderfolgender Quadratzahlen schreiben."[1]

"Der Opponent" schreibt Vollrath, "bezweifelt diese Aussage des Proponenten, indem er z.B. die ungerade Zahl 7 vorlegt. Der Proponent verteidigt die Aussage gegen diesen Angriff, indem er zeigt:

$$7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$$

Er hat damit den Dialog gewonnen. Es werden nun einige Dialoge die-

---

1 Dieser Satz läßt sich auch auf enaktiver bzw. ikonischer Repräsentationsstufe mit der Psephoi-Methode behandeln.

ser Art geführt, bis sichtbar ist, daß der Proponent eine Gewinnstrategie besitzt, daß er nämlich bei einer vorgelegten ungeraden Zahl stets die beiden fraglichen aufeinanderfolgenden Quadratzahlen angeben kann."[1] Die Gewinnstrategie kann er durch die Schreibweise sichtbar werden lassen:

$$7 = \left(\frac{7+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{7-1}{2}\right)^2 = 4^2 - 3^2$$

"Die Spielstände werden zweckmäßigerweise in einem Tableau notiert."

	Opponent	Proponent
		"Jede ungerade Zahl läßt sich ...."
1)	7 ?	$7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$
2)	11 ?	$11 = \left(\frac{11+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{11-1}{2}\right)^2 = 6^2 - 5^2$
3)	k, k ungerade	$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \ldots = k$

Die Dialogführung 1) nennt Vollrath "blind konkret", da der Proponent keine - zumindest nicht sichtbare - Gewinnstrategie hat, und "mit dem Ausrechnen Glück oder Pech haben kann".
Die Dialogführung 2) läßt eine Gewinnstrategie des Proponenten erkennen; sie wird als produktiv-konkret bezeichnet.
Der dritte Dialog stellt durch die Verwendung von Variablen ein Beweisschema dar, das für jeden vorgelegten Wert für k einen Beweis der Aussage liefert. Diese Dialogführung heißt produktiv-formal.
Die Analyse der von Vollrath o.a. Erläuterung und Beschreibung des Dialogs wirft die Frage auf, weshalb die beiden Kontrahenten Opponent, Proponent gerade dieses - richtige - Dialogverhalten zeigen, wo man doch eher annehmen könnte, daß Schweigen die geläufigere Reaktion des Opponenten auf die vorgebrachte Behauptung wäre.
Das richtige Dialogverhalten läßt sich m.E. nur einüben; und zwar unmittelbar im Zusammenhang mit dem Beweis (es sei denn, der operative Sinn logischer Konnektoren wurde bereits zu einem früheren Zeitpunkt bewußt gemacht, und die obige Aufgabe fungiert als Anwendungsaufgabe). Dazu sollte jedoch die logische Struktur der Aussage

---

1 a.a.O. S. 34 (Hervorhebung vom Verfasser)

deutlicher hervorgehoben werden, indem sie etwa in folgende Aufgabe umformuliert wird: "Zu jeder ungeraden Zahl sind zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen anzugeben, so daß die ungerade Zahl als deren Differenz geschrieben werden kann!"
Diese Formulierung bringt sprachlich den Aufforderungscharakter der Quantoren prägnanter zum Ausdruck. Noch deutlicher werden die mit den Quantoren verbundenen Imperative, wenn man bereits die Aufgabe dialogisch formuliert:
"Zu jeder von O vorgegebenen ungeraden Zahl mußt du, P , zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen finden, deren Differenz die ungerade Zahl ergibt!"
Erst wenn die logischen Präliminarien geklärt sind, ist es sinnvoll, die um den Begriff der Gewinnstrategie kreisenden Probleme zu erörtern.
Der logische Aspekt dialogischer Beweise kann auch an folgendem von Vollrath angegebenen Beispiel erläutert werden.

Beweise: Es gibt keine bijektive Abbildung zwischen der Menge der natürlichen Zahlen N und der Menge der reellen Zahlen im offenen Intervall (o,1).

Formal: Beweise $, \neg \bigvee_{f : N \longrightarrow (o,1)}$ **f ist bijektiv.**

In einer vorbereitenden Phase spricht, wie Vollrath ausführt, der Lehrer als Proponent die obige Behauptung aus. Da zuvor die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen bewiesen worden ist, werden die Schüler gegen diese Behauptung opponieren, worauf der Proponent die Angabe einer Bijektion fordert. Die Schüler werden dann als Opponent eine Abbildung zu konstruieren suchen. Der Lehrer gibt darauf eine Zahl an, die nicht erfaßt worden ist. Nach einigen Beispielen werden die Schüler die Strategie des Lehrers durchschauen.
Als Tableau (leicht modifiziert) mit der Gewinnstrategie bringt Vollrath:

Proponent	Opponent
Es gibt keine eineindeutige Zuordnung zwischen N und (o,1)	
Welches n gehört zu o, a_1, a_2)••• mit $o \neq a_n \neq a_{nn}$?	Es gibt eine eineindeutige Zuordnung. $n \longleftrightarrow o, a_{n_1}, a_{n_2})\bullet\bullet\bullet$

Im folgenden Dialog tritt dagegen die logische Struktur des Beweises deutlicher hervor, daneben läßt er genau erkennen, woran die Konstruktion einer eineindeutigen Abbildung von N in (o,1) scheitert.

	Proponent	Opponent
1)	$\neg \bigvee$ f bijektiv $f : N \longrightarrow (o,1)$	
2)	?	$\bigvee$ f bijektiv $f : N \longrightarrow (o,1)$
3)	Ist f surjektiv? / Ist f injektiv?	$f : N \longrightarrow (o,1)$ $n \longmapsto o, a_{n_1}, a_{n_2})\bullet\bullet\bullet$ ist bijektiv
4)	$r = o, a_1 a_2 \bullet\bullet\bullet$ $o \neq a_n \neq a_{nn}$?	f ist surjektiv denn $\bigwedge_{r \in (o,1)} \bigvee_{n \in N}$ $r = o, a_{n_1} a_{n_2} \bullet\bullet\bullet$

In der 2. Zeile behauptet der Opponent (o) die Existenz einer Bijektion f der gewünschten Art. Der Proponent (P) fordert ihn darauf zur Angabe von f auf. Sodann konstruiert O eine Abbildung und behauptet, daß sie bijektiv ist. Dies greift P an, indem er nach den definierenden Merkmalen einer Bijektion fragt. O gelingt dann möglicherweise der Nachweis, daß f injektiv ist; dieser Teil wurde im Tableau nicht weiter verfolgt. Behauptet O hingegen die Surjektivität von f, so geht er die Verpflichtung ein, eine Allaussage zu verteidigen. P greift diese an, indem er einepassend konstruier-

te reelle Zahl r vorgibt, zu der es O nicht gelingen kann, ein n anzugeben mit $r = o,a_{n_1} a_{n_2} \ldots$ wozu er jedoch durch den Existenzquantor verpflichtet ist.
O verliert also deshalb den Dialog, weil er in der Konjunktion "f ist surjektiv $\wedge$ f ist injektiv" die erste Komponente nicht verteidigen kann.

β. Der konventionelle Beweis

Obwohl es möglich ist, wie H.-J. Vollrath gezeigt hat, mit Hilfe von Dialogen einigen altbekannten Schwierigkeiten beim Lehren des Beweisens zu begegnen, warnt Vollrath ausdrücklich vor einem möglichen Mißverständnis: "Es ist nicht meine Absicht, eine neue Form des Beweisens für die Schule einzuführen. Die Dialoge sollen in enger Verbindung zur Heuristik zu den mathematischen Beweisen in klassischer Form hinführen. Das schließt nicht aus, daß man sich in bestimmten Altersstufen mit der Dialogebene begnügen kann."[1]
Die im 2. Abschnitt analysierte Aufgabe mit komplexer logischer Struktur erbrachte die Abhängigkeit der zu ihrer konventionellen Lösung notwendigen Operationen von dieser logischen Struktur. Auf der Grundlage dieser Feststellung wurde sodann die Forderung erhoben, die logischen Konnektoren im Unterricht in ihrer pragmatischen Funktion bewußt zu machen. Das Entscheidende dabei war die Verknüpfung jedes Konnektors mit einem Handlungsschema. Als besonders suggestiv und vielseitig fortsetzbar haben sich dialogische Handlungsschemata erwiesen, die zunächst dem konventionellen Beweis ferner zu stehen scheinen. Durch den Aspekt der Verinnerlichung der dialogischen Situation und damit der Dialogschemata, konnten sie auch für den konventionellen Beweis nutzbar gemacht werden.
Eine von vornherein stärkere Affinität zum konventionellen Beweis weisen die auf S.144 eingeführten Beweis- und Widerlegungsrahmen auf. Der Vorteil der dialogischen Interpretation ist u.a. die Möglichkeit, mit ihrer Hilfe die Beweis- und Widerlegungsrahmen zu begründen und so auf deren einsichtige Verwendung hinzuwirken. Als Beispiel hierzu möge der zu $a \wedge b$ gehörige Beweisrahmen dienen.

---

1 H.-J. Vollrath (1969) S. 38

Behauptung: $a \wedge b$

Beweis. ... also gilt a .

... also gilt b .

Der Konnektor "$\wedge$" ("und") soll als Reiz- bzw. Signalwort wirken, beide Aussagen zu beweisen (beide Teilaufgaben zu lösen) - und nun kommt das dialogische Element zum Tragen - weil ich mir bewußt sein muß, daß ich von einem Opponenten aufgefordert werden könnte, sowohl einen Beweis für a als auch einen Beweis für b zu liefern. Die Strategie, diesen möglichen Angriffen zu begegnen, besteht darin, a und b zu beweisen.

Hierzu noch einige Beispiele.

Zeige, die Funktion $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = 2x + 3$ ist stetig in $x_o \in R$ [1]. Benutzt man die in 5a verwendete Sprechweise, so kann diese Aufgabe auch als Aufforderung gedeutet werden, an der gegebenen Funktion f das Merkmal "stetig" zu identifizieren.

Zunächst vergegenwärtigt man sich die Definition für Stetigkeit oder eine andere dafür hinreichende Bedingung.

Definition: $f : R \longrightarrow R$ heißt stetig in $x_o \in R$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle x aus $|x - x_o| < \delta$ folgt: $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$

Oder durch Explizierung der logischen Konnektoren:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in R} (|x - x_o| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon)$$

Eine Definition verstehen heißt, sie operativ interpretieren, sie in Beweishandlungen umsetzen zu können.

Man könnte diese Fähigkeit kurz umschreiben mit: "den operativen Sinn einer Definition verstehen".

Ebenso wie beim dialogischen Beweis kann man dem konventionellen Beweis in einer heuristischen Vorphase die produktiv-konkrete Nachweisebene voranstellen.

---

1 Da es uns primär darauf ankommt, die Beziehung zwischen logischer Struktur und Handlungsstruktur transparent zu machen, erörtern wir ein inhaltlich sehr einfaches Beispiel.

Vorphase: $\varepsilon = 1$

Der Allquantor fordert auf, für beliebig vorgegebenes (hier $\varepsilon = 1$) mit einem Beweis von (A) reagieren zu können.

(A): $\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in R} |x - x_0| < \delta \longrightarrow 2|x - x_0| < 1$

Hier wird ein inhaltlich-mathematischer Schluß vollzogen, indem der Ausdruck für $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ hier: $2|x - x_0| < 1$ passend umgeformt wird.

Aus $2|x - x_0| < 1$ erhält man $|x - x_0| \frac{1}{2}$; somit wird $\delta = \frac{1}{2}$ gewählt.

Für dieses $\delta = \frac{1}{2}$ kann jeder Angriff auf

$$\bigwedge_{x\in R} |x - x_0| < \frac{1}{2} \longrightarrow 2|x - x_0| < 1$$ abgewehrt werden.

Ergebnis: Für $\varepsilon = 1$ wird $\delta = \frac{1}{2}$ gewählt.

Gibt man sich andere Werte ε vor, so ist schnell eine Strategie für die Wahl von δ gefunden: $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Diese Gleichung drückt aus, daß man zu jedem vorgegebenen ε ein $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ angeben kann, so daß die in der Definition geforderten Bedingungen erfüllt werden.

Als nächstes wird die Beweisstrategie formal formuliert.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Die Bedingung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ liefert $2|x - x_0| < \varepsilon$

Wähle speziell $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Dann gilt für beliebiges $x \in R$

$$|x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ein weiteres Beispiel aus der Teilbarkeitslehre.

Beweise: $\bigwedge_{a,b\in N} a|b \wedge b|c \longrightarrow a|c$

Definitionseinführung $x|y :\Longleftrightarrow \bigvee_{z\in N} xz = y$

Beweis: Sei a, b, c beliebig aber fest aus N.

Pragmatische Überlegung des Aufgabenlösers:
Auf $a|b \wedge b|c$ muß ich mit einem Beweis von $a|c$ reagieren können. Was bedeutet $a|c$?
$\left(\bigvee_{z\in N} az = c \right)$

$a|b$ d.h. $\bigvee_{z_1 \in N} az_1 = b$ 1)

$b|c$ d.h. $\bigvee_{z_2 \in N} az_2 = e$ 2)

" $\wedge$ " fordert zur Nutzung beider Voraussetzungen auf.

$a(z_1 z_2) = c$ und somit $a|c$

Inhaltlicher Schluß: Setze 1) in 2) ein! Mit $z := z_1 z_2$ gilt somit $a|b$

Auf jedes wegen der Teilbarkeitsbedingungen in der Prämisse von einem fiktiven Opponenten vorzugebende z_1, z_2 kann daher mit einem, die Gültigkeit der Konklusion sichernden $z = z_1 z_2$ reagiert werden.

Das folgende Beispiel aus der Analysis soll zeigen, wie die Anwendung eines Lehrsatzes von dessen logischer Struktur abhängt.
Die Funktion f besitze in $x_0 \in I$ (offenes Intervall) Ableitungen bis wenigstens zur Ordnung $n \geq 2$
$f^{(v)}(x_0) = 0 \quad (1 \leq v \leq n-1) \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0 \wedge n$ ist gerade $\rightarrow$
f besitzt in x_0 ein relatives Extremum.
Soll dieses hinreichende Kriterium zur Feststellung von relativen Extremwerten angewendet werden, so sollte die konjunktive Struktur der Prämisse folgende Handlungen bewirken:

1. Bildung der Ableitungen $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ ... $f^{(n-1)}$ und deren Auswertung im Punkte $x = x_0$. Überprüfung ob $f^{(v)}(x_0) = 0$ $(v = 1, \ldots, n-1)$; falls ja:
2. Bildung der Ableitung $f^{(n)}$ und Überprüfung ob $f^{(n)}(x_0) \neq 0$; falls ja:
3. Überprüfung, ob n gerade; falls ja besitzt f in x_0 ein relatives Extremum.

Aufgabe. Stelle den oben beschriebenen Überprüfungsprozeß in einem Flußdiagramm dar!

In den eben erörterten Beispielen fällt es leicht, den operativen Sinn der Definitionen zu erkennen, da ihre normalsprachliche Formulierung und erst recht natürlich die formale Darstellung genau die logischen Konnektoren erkennen lassen. In diesen Fällen fungieren die Zeichen "und", "für alle ..." " $\wedge$ ", " $\bigwedge$ " als Signal- oder

Reizzeichen, die gewisse Reaktionen, nämlich Beweis- oder Widerlegungsoperationen auslösen; genau dies ist ja mit "pragmatischer Funktion logischer Konnektoren" gemeint.
Andererseits kennt man aus der wissenschaftlichen wie aus der Schulbuchliteratur genügend Beispiele für Formulierungen, bei denen zugunsten einer gefälligen sprachlichen Darstellung die Hervorhebung der logischen Struktur in den Hintergrund rückt. Um die logische Tiefenstruktur solcher Texte an die Oberfläche zu heben, ist daher zunächst eine Übersetzung des Textes in eine normierte logische Form nötig. Dieser Übersetzungsvorgang kann zudem noch erschwert werden, wenn die logischen Konnektoren durch anders lautende grammatikalische Partikel dargestellt werden.

1. Beispiel: Ein Viereck, in dem zwei Seiten parallel, jedoch die anderen Seiten nicht parallel sind, heißt Trapez.

2. Beispiel: a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
b) Eine konvergente Folge ist beschränkt.
c) Alle konvergenten Folgen sind beschränkt.
d) Für alle Folgen (a_n) gilt: Wenn (a_m) konvergiert, dann ist (a_m) beschränkt.
e) Für alle konvergenten Folgen (a_m) gilt: (a_m) ist beschränkt.
f) Dafür, daß eine Folge konvergiert, ist notwendig, daß sie beschränkt ist.
g) Hinreichend dafür, daß eine Folge (a_m) beschränkt ist, ist ihre Konvergenz.
h) Sei (a_n) eine konvergente Folge; dann ist (a_n) beschränkt.
i) Die Konvergenz einer Folge impliziert ihre Beschränktheit.
k) Eine Folge, die nicht beschränkt ist, kann nicht konvergieren.
l) $\bigwedge_{(a_n)}$ (a_m) konvergiert $\longrightarrow$ (a_n) ist beschränkt
m) $\bigwedge_{(a_n)}$ (a_m) ist beschränkt
(a_n) konvergent

Einem im mathematischen Jargon nicht bewanderten dürfte es sicher schwerfallen zu erkennen, daß sämtliche Aussagen denselben Inhalt

haben. Um mit Wittgenstein zu reden: erst wer das mathematische Sprachspiel beherrscht, weiß, daß darin alle die genannten Sätze die gleiche Funktion erfüllen und daher das gleiche bedeuten. In den normalsprachlichen Formulierungen sind die logischen Konnektoren unmittelbar am besten in d), e) und c) zu erkennen. Die anderen Texte mit Ausnahme von l) und m) erfordern dagegen mehr oder weniger starke Übersetzungen, um zu einer logisch normierten nicht notwendig formalen Darstellung zu gelangen.

Nun wurden aber die Verwendungsregeln (dialogische Handlungsschemata bzw. Beweis- oder Widerlegungsrahmen) logischer Konnektoren in Verbindung mit deren normierter normalsprachlicher bzw. symbolischer Darstellung eingeübt. Es darf daher von vornherein kaum erwartet werden, daß der pragmatische Aspekt logischer Zeichen auch in anderen, von jenen Standards abweichenden Codierungen, erkannt wird. Über eine vergleichbare Situation berichtet H. Siwek: "Lorsque dans une phrase sont mis une flèche d'implication ou les mots antécédent, conséquent, l'élève soit qu'il faut se servir de la définition d'implication, lorsque la situation de même structure logique est décrite dans un problème sans formalisation, l'élève rencontre des difficultés; ne formalisant pas cette situation il ne s'apercoit pas qu'il y a une implication dans son problème .... Les élèves appliquent la logique consciemment quand le texte du problème leur suggère qu'il s'agit de l'application des lois formelles de logique. Au sein des situations naturelles où il manque cette suggestion, beaucoup d'élèves ne se rendent pas compte que l'on peut se servir de connaissances de logique." [1]

Die auf empirischen Untersuchungen gründenden Ausführungen von H. Siwek würden somit die Formalisierung mathematischer Sätze und Definitionen zumindest so weit nahelegen, als dadurch ihre logische Struktur transparent wird. Ob und bis zu welchem Grade darüberhinaus auch Prädikate schematisiert werden sollten, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit. Ein pragmatisches Kriterium: im Unterricht sollte man sich stets dann zur Formalisierung entschließen, wenn die Schematisierung der Klarheit dient, Sachverhalte durchsichtig macht und von den Schülern als nützlich empfunden wird.

---

1 H. Siwek (1973) S. 3o f

Das letzte Beispiel hat gezeigt, daß der Mathematikunterricht auch im Sinne der logischen Schulung stärker sprachliche Phänomene berücksichtigen sollte. Neben der mathematischen Flexibilität gegenüber Problemen ist m.E. auch die Flexibilität hinsichtlich der mathematischen Fachsprache wünschenswert. Diesem Ziel könnte man dadurch näherkommen, daß im Unterricht im geeigneten Kontext die gebräuchlichen mathematischen Redewendungen hervorgehoben und eingeübt werden. Von einer solchen sprachlichen Schulung - als Vorbereitung zum Formalisieren - wäre zu erhoffen, daß der Übergang zur logisch normierten Darstellung und zur logischen Formalisierung besser als bisher gelingt, und damit auch die mit den logischen Konnektoren verbundenen Imperative besser zu befolgen wären.

d) Ansätze zur formalen Logik

Abschließend soll an einigen Beispielen der Übergang von inhaltlich mathematischen Aktivitäten zu logischen Aufgabenformen (Tautologien) auf der Grundlage der "abstraction réfléchissante" demonstriert werden.

Beispiel. Für alle rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$ gilt: Ist $\frac{m}{n}$ ein unechter oder echter Bruch, so ist $(\frac{m}{n})^2 \neq 2$.

Sei $\frac{m}{n}$ beliebig aber fest.

1. Fall: $n = 1$; da 2 nicht Quadratzahl ist, gilt $m^2 \neq 2$.

2. Fall: $n \neq 1$ und o.B.d.A $(m, n) = 1$; dann ist mit $\frac{m}{n}$ auch $\frac{m^2}{n^2}$ ein echter Bruch und somit verschieden von 2.

Für $r \in \mathbb{Q}$ führen wir die Prädikate ein

u(r) : r ist ein unechter Bruch

e(r) : r ist ein echter Bruch

b(r) : $r^2 \neq 2$

Dann hat der obige Beweis folgende logische Struktur.

Die Lösung der Aufgabe $u(r) \vee e(r) \longrightarrow b(r)$ wird zurückgeführt auf die Lösung der beiden Aufgaben $u(r) \longrightarrow b(r)$ und $e(r) \longrightarrow b(r)$.

Bei der Lösung anderer Aufgaben mit der Struktur $a \vee b \longrightarrow c$ bemerkt man bei Analyse des Lösungsschemas stets die Zurückführung

auf die Lösung von $a \longrightarrow c$ und $b \longrightarrow c$.
Das Beweisschema "Fallunterscheidung" kann nun folgendermaßen dialogisch begründet werden[1] :

	Proponent P	Opponent O
1.	$(a \longrightarrow c) \wedge (b \longrightarrow c) \longrightarrow (a \vee b \longrightarrow c)$	
2.	l ? | r ?	$(a \longrightarrow c) \wedge (b \longrightarrow c)$
3.	$a \vee b \longrightarrow c$	$a \longrightarrow c$ | $b \longrightarrow c$
4.	?	$a \vee b$
5.	a (3.)	a
6.	c	c

Nach der von O verteidigten Konjunktion der 2. Zeile (Angriff auf die 1. Zeile) verteidigt sich P mit $a \vee b \longrightarrow c$. O greift dies mit $a \vee b$ an und verteidigt sich auf P's Angriff (4.Zeile) mit dem von ihm gewählten a. Mit diesem a (das O sicher nicht angreifen wird) greift P die 3. Zeile an. O verteidigt sich mit c und P übernimmt c, damit hat er seine 3. Zeile verteidigt; O kann nicht mehr angreifen. P hat damit gewonnen.
Die Dialogführung, die man im Unterricht natürlich zunächst mit konkreten Aufgaben a, b, c durchspielen sollte zeigt, daß P unabhängig vom Inhalt der Aufgaben a, b, c stets über eine Gewinnstrategie verfügt. Das "stets" kann dadurch gezeigt werden, daß auch andere Dialogabläufe durchgespielt werden.
Dialogische Begründung des Syllogismus.
Mit p, k, h werden beziehungsweise der Satz von Pythagoras, der Kathetensatz und der Höhensatz bezeichnet. Ferner seien die Aufgaben gelöst worden: $p \longrightarrow k$, $k \longrightarrow h$; dann kann auch $p \longrightarrow h$ als gelöst gelten.

---

1 Zur sog. allgemeinen Dialogregel, die den Verlauf der folgenden Dialoge steuert vgl. P. Lorenzen (1967)

Proponent P	Opponent O
1. $(p \longrightarrow k) \wedge (k \longrightarrow h) \longrightarrow (p \longrightarrow h)$	
2. l ? | r ?	$(p \longrightarrow k) \wedge (k \longrightarrow h)$
3. p	$p \longrightarrow k$ | $k \longrightarrow h$
4. $p \longrightarrow h$	k | h
5. h	p

Die von O in der 3. Zeile gesetzten Behauptungen greift P durch p bzw. k (für dessen Richtigkeit O einsteht) an. O verteidigt sich u.a. mit h (4.Zeile). P verteidigt sich mit $p \longrightarrow h$ auf O's Angriff in der 2. Zeile. O greift mit p an, worauf P sich mit h verteidigt. P gewinnt. Somit ist auch die Lösung der Aufgabe $(a \longrightarrow b) \wedge (b \longrightarrow c) \longrightarrow (a \longrightarrow c)$ unabhängig vom Inhalt der Aufgaben a, b, c möglich.

Aufgabe: Spiele andere Dialogführungen durch !

Im folgenden Beispiel wird unter logischen Aspekten das sog. Spezialisieren von Sätzen untersucht.
Gegeben sei der Satz

1. In jeder Raute halbieren die Diagonalen einander.
   Ferner sei die Raute definiert als Parallelogramm mit einem Paar gleich langer benachbarter Seiten.
   Das Quadrat wird als Raute mit einem rechten Winkel definiert.

Die beiden Sätze

2. In jedem Quadrat halbieren die Diagonalen einander
3. In jeder Raute halbiert einer der beiden Diagonalen die andere

werden als Spezialfälle des 1. Satzes bezeichnet. Es soll nun begründet werden, daß diese Sätze, wenn 1. bewiesen ist, nicht mehr bewiesen werden brauchen. Die Lösung der Beweisaufgaben 2. und 3. kann auf den Beweis von 1. zurückgeführt werden.

Mit den Abkürzungen

a : Rechteck ABCD ist ein Parallelogramm

b : $\overline{AB} = \overline{BC}$

c : Diagonale AC halbiert Diagonale BD

d : Diagonale BD halbiert Diagonale AC

e : $\sphericalangle DAB = 90^\circ$

ergeben sich folgende logischen Strukturen

1. $a \wedge b \longrightarrow c \wedge d$

2. $a \wedge b \wedge e \longrightarrow c \wedge d$

3. $a \wedge b \longrightarrow c$

Sieht man einmal von der oben vorliegenden Situation ab, so kann der Prozeß der Spezialisierung eines Satzes beschrieben werden als Übergang von

$a \longrightarrow b$ zu $a \wedge c \longrightarrow b$ (Verschärfen der Voraussetzung)

bzw. von

$a \longrightarrow b \wedge c$ zu $a \longrightarrow b$ (Abschwächen der Behauptung)

Im Dialog erkennt man, daß es für die Aufgabe

4. $(a \longrightarrow b) \longrightarrow (a \wedge c \longrightarrow b)$ eine Gewinnstrategie gibt

Proponent P	Opponent O
1. $(a \longrightarrow b) \longrightarrow (a \wedge c \longrightarrow b)$	
2. $a \wedge c \longrightarrow b$	$a \longrightarrow b$
3. l ? | r ?	$a \wedge c$
4. a(2.)	a | c
5. b	b

In der 4. Zeile greift P mit a die 2. Zeile von O an. Dieser verteidigt sich in der 5. Zeile mit b. P kann dieses b zur Verteidigung der 2. Zeile übernehmen.

Aufgabe. Zeige die Existenz einer Gewinnstrategie für

5. $(a \longrightarrow b \wedge c) \longrightarrow (a \longrightarrow b)$

In der Unterrichtspraxis sollte die Unabhängigkeit der Lösbarkeit der Aufgabenformen vom Inhalt der Aufgaben a, b, c an mehreren konkreten Beispielen gezeigt werden, für die auch der Dialog durchzuspielen wäre. Erst dann empfiehlt es sich, den Dialog mit Aufgabenvariablen durchzuführen.

Eine Bemerkung zur Dialogführung muß hier noch angefügt werden. Wie die Beispiele zeigen, wurden in den Dialogen mehr Operationen ausgeführt, als aufgrund der Dialogregeln für die logischen Partikel alleine zulässig wären. Dialoge der angegebenen Form setzen noch zusätzliche Regeln voraus, die etwa die Art und Anzahl von Angriffen und Verteidigungen, das Übernehmen von Aussagen etc. festsetzen. Diese speziellen Dialogregeln wurden hier nicht expliziert[1]. M.E. ist das auch für die genannten Beispiele nicht unbedingt nötig, da der Dialogverlauf hier in enger Anlehnung an die inhaltlichen Lösungsaktivitäten erläutert werden kann. Beschäftigt man sich jedoch intensiver mit dem dialogischen Beweis aussagen- oder prädikatenlogischer Sätze, kommt man um eine Explizierung der speziellen Dialogregeln nicht herum.

---

1 In präziser Form findet man sie bei K. Lorenz (1968) bzw. in P. Lorenzen (1967) S. 166

LITERATURVERZEICHNIS

Abkürzungen für Zeitschriften

BMU	: Beiträge zum Mathematikunterricht
Educ.Stud.	: Educational Studies in Mathematics
M.Ph.S	: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte
M.i.S	: Mathematik in der Schule
MU	: Der Mathematikunterricht
PM	: Praxis der Mathematik

Aebli, H.	: Psychologische Didaktik, Stuttgart 1963
Becker, O.	: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg 1959
Becker, O. (Hrsg.)	: Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965
	: Das mathematische Denken der Antike, Göttingen 1957
Beth, E.	: Elements of Mathematics, Reidel Publ. 1965
	: Über Lockes "Allgemeines Dreieck", in: Kant Studien 48 1956/57
Beth, E. u. Piaget, J.	: Mathematical Epistemology and Psychology, Reidel Publ. 1966
Dienes, Z.P.	: An example of the passage from the concrete to the manipulation of formal systems, in: Educ.Stud. Vol 3 N 3/4 (1971) S. 337-352
	: Moderne Mathematik in der Grundschule, Freiburg 1969
Dietz, A.	: Einige Aspekte zur lerntheoretischen Fundierung des Mathematikunterrichts, in: M.i.S. (1972) S. 326-334

Exner, R.M. u. Hilton, J.P.
: Should mathematical logic be taught formally in mathematics classes?, in: The Mathematics Teacher 5 (1971) S. 388-401

Fehr, F.
: Reform des Mathematikunterrichts an den Secondary Schools in den Vereinigten Staaten, in: M.Ph.S Bd.7 (1961) S. 224-234

Fischer, W.L.
: Aufgabenlogik, in: Archimedes Sonderheft (1967) S. 4-7

Freudenthal, H.
: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Stuttgart 1973

Fricke, A.
: Operative Lernprinzipien, in: Der Unterricht in der Grundschule, Stuttgart 1970

Gagné, R.
: Die Bedingungen des menschlichen Lernens, Hannover 1970

Gentzen, G.
: Untersuchungen über das logische Schließen I, in: Math.Zeitschr. 39 (1934) S. 176-210

Gnirk, H./ Homann, G./Lubeseder, U.
: Strategiespiele im Unterricht, Hannover 1970

Griesel, H.
: Elementare Mengenlehre und Klassenlogik auf dem Schulniveau, in: MU 4 (1959) S. 114-136

: Überlegungen zu den mathematischen und psychologischen Grundlagen des Rechenunterrichts in der Grundschule, in: BMU (1969) S. 128-142

Hermes, H.
: Logische Probleme der Gleichungslehre, in: MU 5 (1967) S. 37-43

Jeuck, R.
: Mathematik als Handlung, Diss.Köln 1973

Kamlah, W. u. Lorenzen, P.
: Logische Propädeutik, Mannheim 1967

Kolmogorov, A.N.
: Zur Deutung der intuitionistischen Logik, in: Math.Zeitschr. 35 (1932) S. 58-65

Landa, L.N.
: Algorithmierung im Unterricht, Berlin 1969

Lauter, J. : Aufbau der elementaren Gleichungslehre, in: MU 5 (1964) S. 59-119

Lenné, H. : Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart 1969

Lietzmann, W. u. Stender, R. : Methodik des mathematischen Unterrichts, Heidelberg 1961

Lorenz, K. : Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen, in: Arch.f.math. Logik u.Grundl.d.Math. 11 (1968) S. 32-55

: Elemente der Sprachkritik, Frankfurt 1971

Lorenzen, P. : Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955, 2.Aufl. 1969

: Formale Logik, Berlin 1967

: Methodisches Denken, Frankfurt 1968

Markwald, H. : Formale Logik und Metamathematik, Stuttgart (1972)

: Legespiele, eine Propädeutik für Algorithmen, in: MU 5 $(1972)_2$ S.73-87

Maier, H. u. Plößl, W. : Mathematische Lernspiele, in: Meschkowski, H. Didaktik der Mathematik1 Stuttgart 1972

Meschkowski, A. : Mathematik Duden für Lehrer, Mannheim 1969

Mostowski, A. : Thirty years of foundational studies, Blackwell (1966)

Moise, E. : Activity and Motivation, in: American Mathematical Monthley 72 (1965) S. 4o7-422

Neumann, Th. u. Otte,M. : Über formale und inhaltliche Logik in der Didaktik besonders im Mathematik-unterricht, in: Studium Generale 24 (1971) S. 1121-113o

Piaget, J. : Logic and Psychology, Manchester 1953

: Psychologie der Intelligenz, Zürich (1966)

: Die Entwicklung des Erkennens, Stuttgart $(1972)_1$

: Erkenntnistheorie der Wissenschaften vom Menschen, Frankfurt (1972)$_2$

: Einführung in die genetische Erkenntnistheorie, Frankfurt (1973)

Servais, W. : Present-day problems of mathematical education, in: The Mathematics Teacher (1968) S. 791-

Siwek, H. : Logique formelle et raisonnement naturel des élèves dans l'enseignement de la mathématique, in: Educ.Stud. 5 (1973) S. 23-37

Schwirtz, W. : Die Bedeutung des operativen Prinzips für den Geometrieunterricht der Hauptschule, in: Lehren und Lernen VI/9 (1969) S. 299-4o8

Steiner, H.-G. : Logische Probleme im Mathematikunterricht: Die Gleichungslehre, in: M.Ph.S 7 (1961) S. 178-2o7

: Die Verbindung von Logik und Mathematik im mathematischen Unterricht, in: M.Ph.S 9 (1963) S. 74-95

: Bemerkungen zur Wittmannschen Axiomatisierung des Gruppierungsbegriffs von J.Piaget und Hinweise auf weitere didaktisch relevante Modelle, erscheint in: Die Schulworte

Thiel, Chr. : Was will die operative Mathematik, in: Archimedes 2 (197o) S. 51-53

Vollrath, H.-J. : Aspekte dialogischen Lehrens im Mathematikunterricht, Die deutsche Schule 5 (1968) S.327-336

: Der Beweis als Gewinnstrategie im Unterrichtsdialog PM 11 (1967) S. 297-3oo

: Dialogisches Lehren von Beweisen, BMU (1969) S. 33-39

: Dialogisches Lehren des Beweisens, unveröff.Manuskript

Walther, G. : Die Fastgruppierung der I-Kalküle Tagungsbericht Oberwolfach 44 (1972)

Wäsche, H. : Logische Begründung der Lehre von den Gleichungen und Ungleichungen, in: MU 5 (1964) S. 7-58

Winter, H. : Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Grundschule, in: Beiträge zum Lernzielproblem, Ratingen 1972

: Zahl und Zeichen - Semiotische Dimensionen im mathematischen Lernprozeß, in: BMU (197o) S. 157-172

Wittgenstein, L. : Philosophische Untersuchungen, Oxford 1953

Wittmann, E. : Die Mengenlehre und der Mathematikunterricht in der Grundschule, in: MU 1 $(1971)_1$ S. 26-52

: Der Spielraum für einen modernen Mathematikunterricht in der Grundschule, in: Die Grundschule 3 $(1971)_2$ S. 61-76

: Zum Begriff "Gruppierung" in der Piagetschen Psychologie, in: BMU $(1972)_1$ S. 2o3-222

: Grundkurs der Mathematikdidaktik I, Manuskript Dortmund $(1972)_2$

: Dialogue Logic and Heuristics, Report submitted to the 2. Int.Congress on Math.Educ., Exeter $(1972)_3$

23. Rencontre internationale de la CIEAM - Cracovie 1971, in: Educ.Stud. 4 (1972) S. 491-5oo

L e b e n s l a u f

Am 3. 8. 1945 wurde ich, Gerd Walther, als Sohn des Komponisten H.E. Erwin Walther und seiner Ehefrau Maud in Amberg geboren.
Nach dem Besuch der Volksschule und des Gregor-Mendel-Gymnasiums in Amberg legte ich 1964 das Abitur ab. Im Wintersemester des gleichen Jahres begann ich in Erlangen Mathematik, Physik und Philosophie zu studieren, wobei ich besonders von den Professoren H. Bauer, W. Kamlah, P. Lorenzen und W. Specht beeinflußt wurde. Nach der Diplomprüfung im Fach Mathematik im Frühjahr 1970 und meiner anschließenden Tätigkeit als Referendar an einem Nürnberger Gymnasium trat ich Anfang 1971 am Seminar für Didaktik der Mathematik der Pädagogischen Hochschule Ruhr, Abteilung Dortmund meine Stellung als Wissenschaftlicher Assistent an.